यशवंतराव चव्हाण महाराष्ट्र
मुक्त विद्यापीठ

एम. ए. (शिक्षणशास्त्र)
EDU 524

संशोधनात सांख्यिकी तंत्राचे उपयोजन

यशवंतराव
चव्हाण
महाराष्ट्र
ज्ञानगंगा घरोघरी मुक्त विद्यापीठ

एम.ए. (शिक्षणशास्त्र)

EDU 524

संशोधनात सांख्यिकी तंत्राचे उपयोजन

लेखक : प्रा. वसंतराव कर्डिले, डॉ. संजीवनी महाले

यशवंतराव चव्हाण महाराष्ट्र मुक्त विद्यापीठ, नाशिक

कुलगुरू : प्रा. (डॉ.) दिलीप म्हैसेकर

शिक्षणशास्त्र विद्याशाखा परिषद

लेखक

प्रा. वसंतराव कर्डिले
निवृत्त ज्येष्ठ प्राध्यापक
ऋतूराज बंगला, कौठघाट, मुंबई नाका
नाशिक

डॉ. संजीवनी महाले
अधिव्याख्याता
शिक्षणशास्त्र विद्याशाखा
य.च.म.मुक्त विद्यापीठ, नाशिक

आशय संपादन

डॉ. अनंत जोशी
संचालक, शिक्षणशास्त्र विद्याशाखा
य.च.म.मुक्त विद्यापीठ, नाशिक

अनुदेशन संपादन

डॉ. संजीवनी महाले
अधिव्याख्याता, शिक्षणशास्त्र विद्याशाखा
य.च.म.मुक्त विद्यापीठ, नाशिक

शिक्षणक्रम संयोजक

डॉ. विजया पाटील
सहायक प्राध्यापक, शिक्षणशास्त्र विद्याशाखा
य.च.म.मुक्त विद्यापीठ, नाशिक

निर्मिती

श्री. आनंद यादव
व्यवस्थापक, ग्रंथनिर्मिती केंद्र
य.च.म.मुक्त विद्यापीठ, नाशिक

First Edition developed under DEC development grant.

❑ **प्रथम प्रकाशन** : ऑक्टोबर २००२ ❑ **प्रकाशन क्रमांक** : ११७६

❑ **पुनर्मुद्रण** : फेब्रुवारी २००६, मे २००६, एप्रिल २००७, जुलै २०१६

❑ **मुद्रक** : श्री. प्रशांत राका, मे. राका प्रिंटर्स, २३४, राजदीप चेंबर्स, फावडे लेन, रविवार कारंजा, नाशिक ४२२ ००१

❑ **प्रकाशक** : श्री. शिलानाथ जाधव, प्रभारी कुलसचिव, यशवंतराव चव्हाण महाराष्ट्र मुक्त विद्यापीठ, नाशिक

EDU 524/DB/AF16-156

कुलगुरूंचे मनोगत

यशवंतराव चव्हाण महाराष्ट्र मुक्त विद्यापीठाने सन १९९२ साली पदव्युत्तर आणि संशोधन शिक्षणक्रमाचे विकास कार्य हाती घेतले. त्यासाठी संपूर्ण महाराष्ट्र राज्यातून संशोधन आणि विकास सल्लागार समिती निश्चित करण्यात आली. एम्.फिल. शिक्षणक्रमासाठी संशोधन पद्धती हा अभ्यासक्रम अनिवार्य करण्यात आला. साधारणतः त्याच कालखंडात विद्यापीठाने एम्.एड. शिक्षणक्रम विकसनाचे कार्य हाती घेतले. त्यासाठी तज्ज्ञ सल्लागार समिती नियुक्त करण्यात आली. या समितीने पदव्युत्तर आणि संशोधन शिक्षणक्रमातील संशोधन पद्धती, मूल्यनिर्धारण व मूल्यमापन, अनुदेशन प्रणाली अभिकल्प आणि शिक्षणातील संज्ञापन प्रकार हे अभ्यासक्रम जसेच्या तसे एम.एड.साठी घेण्यात आले.

गेल्या काही वर्षांत शिक्षणशास्त्राचा फारच झपाट्याने विकास झाला असून या विषयाच्या अभ्यासाची गरज अनेक क्षेत्रातल्या लोकांना भासू लागली आहे. शिक्षणशास्त्रातील शैक्षणिक तंत्रविज्ञान, मूल्यमापन, अनुदेशन अभिकल्प, अनौपचारिक शिक्षण व दूरशिक्षण, शैक्षणिक व्यवस्थापन, शैक्षणिक नियोजन हे विषय शिक्षकांबरोबरच इतर क्षेत्रात काम करणाऱ्या लोकांना उपयुक्त वाटू लागले आहेत. या विषयांमध्ये संशोधन करावे असे अनेकांना वाटू लागले व त्यासाठी शिक्षणशास्त्राचा अधिक सखोल अभ्यास करण्याची गरज निर्माण झाली आहे.

शिक्षणशास्त्र निष्णात (एम. एड.) शिक्षणक्रम या दृष्टीनेच तयार करण्यात आला आहे. राज्य सल्लागार समितीने वेगवेगळ्या पाठलेखन समित्यांच्या सहकार्याने हा पदव्युत्तर शिक्षणक्रम विकसित केला आहे. या शिक्षणक्रमात चार गाभाभूत अभ्यासक्रम असून वैकल्पिक स्वरूपात खालील तीन विशेष अभ्यासक्रमांची सोय करण्यात आली आहे.

(१) अनुदेशन तंत्रविज्ञान

(२) शैक्षणिक प्रशासन व नियोजन

(३) प्रौढ व निरंतर शिक्षण

शिक्षक प्रशिक्षण राष्ट्रीय समिती (एन्.सी.टी.ई.) ने विद्यापीठाच्या एम्.एड. शिक्षणक्रमाला मान्यता देताना संशोधन पद्धती या पुस्तकातील संख्याशास्त्राचा भाग वृद्धिंगत करावा अशी सूचना केलेली होती. त्यानुसार या विद्याशाखेने संख्याशास्त्राचा पाठ्यक्रम विकसित केला. त्यास शिक्षणशास्त्र विद्याशाखा परिषदेची मान्यता घेऊन प्रस्तुत अध्ययन साहित्याची निर्मिती करण्यात आलेली आहे.या व्यतिरिक्त या शिक्षणक्रमांतर्गत स्वयं-अध्ययनासाठी एकूण १५ पुस्तके राज्यातील विषयतज्ज्ञांकडून लिहून घेतली आहेत. या शिक्षणक्रमाचे वैशिष्ट्ये म्हणजे प्रथमतःच पदव्युत्तर स्तरावर मराठी माध्यमातून माहितीवर आधारित पुस्तके विकसित करण्यात आली आहेत. अभ्यासपुस्तकांखेरीज ध्वनिफिती व चित्रफितींचाही वापर करण्याची संधी अभ्यासकेंद्रांवर उपलब्ध होणार आहे.

एम.एड. शिक्षणक्रमासाठी एकूण दहा अभ्यासकेंद्रे स्थापन करण्यात आलेली आहेत. या शिक्षणक्रमासाठी अभ्यासकेंद्रांवर परिसंवाद/समंत्रणे/शोधनिबंध/तज्ज्ञ व्यक्तींची व्याख्याने/शोधनिबंध मार्गदर्शन, इत्यादी कार्यक्रम आयोजित करण्यात येणार असून त्यामुळे प्राध्यापक विद्यार्थी आंतरक्रिया होणार आहे.

हा शिक्षणक्रम शिक्षणक्षेत्रात काम करणाऱ्या शिक्षकांना, शैक्षणिक प्रशासकांना त्याचप्रमाणे प्रौढशिक्षण कार्यक्रमात भाग घेणाऱ्या कार्यकर्त्यांना उपयुक्त ठरेल असा मला विश्वास आहे. हा शिक्षणक्रम शिक्षणशास्त्र विषयात संशोधन करू इच्छिणाऱ्या सर्वांनाच पायाभूत शिक्षणक्रम असल्याने संशोधकांसाठी आणखी एक दालन उघडले जाणार आहे.

शिक्षणशास्त्रातील इतर ज्ञानशाखेतही विशेष अभ्यासक्रम यथाकाल सुरू होतीलच. ''ज्ञानगंगा घरोघरी'' हे ब्रीदवाक्य असणाऱ्या विद्यापीठाने आपला व्यवसाय सांभाळून, घरच्या घरी, आपल्या सोयीने पूर्ण करता येईल असा हा पदव्युत्तर शिक्षणशास्त्राचा शिक्षणशास्त्र निष्णात (एम.एड.) शिक्षणक्रम. या शिक्षणक्रमाचा अभ्यास पूर्ण करून आपण खऱ्या अर्थाने निष्णात शिक्षणशास्त्रज्ञ व्हावे हीच अपेक्षा.

पुस्तक दुसरे

संशोधनासाठी सांख्यिकी तंत्राचे उपयोजन

प्रास्ताविक

विभाग १ : मूलभूत सांख्यिकी

यशवंतराव चव्हाण महाराष्ट्र मुक्त विद्यापीठातील एम.एड. शिक्षणक्रमामध्ये विद्यार्थ्याने तात्त्विक अभ्यासक्रमाबरोबर संशोधन कार्य करावे अशी विद्यापीठाची अपेक्षा आहे. या हेतूनेच संशोधन पद्धती ह्या अभ्यासक्रमाचा समावेशही करण्यात आलेला आहे. संशोधन कार्य करीत असताना संशोधक विविध साधनांच्या साहाय्याने संख्यात्मक माहिती/सामग्री एकत्रित करतो. या माहितीचे वर्गीकरण, कोष्टीकरण कसे करावे ह्याबाबतची माहिती या पुस्तकात दिलेली आहे. या माहितीची/सामग्रीची केंद्रीय प्रवृत्ती (Central Tendency) म्हणजे समूहाचा वास्तव प्रातिनिधिक गुणांक काढण्यासाठी बहुलक (Mode), मध्यांक (Median) आणि मध्यमान (Mean) या तीन पद्धतींचे सोदाहरण स्पष्टीकरण केलेले आहे. संशोधनात केंद्रीय प्रवृत्ती या परिमाणातील मध्यमानाचाच वापर का केला जातो हेही स्पष्ट केलेले आहे. दोन किंवा अधिक गट असल्यास त्यांचे संयुक्त मध्यमान (Combined Mean) कसे काढावे ह्याबाबतही माहिती दिलेली आहे. केंद्रीय प्रवृत्तीच्या दोन्ही बाजूला गुणांकाचे वाटप कसे आहे हे पाहिल्याशिवाय संशोधकाला अचूक निष्कर्ष काढता येत नाही. त्यासाठी विचलनाची (Variability), विविध मापने, गुणांक विस्तार (Range), चतुर्थक विचलन (Quartile Deviation), मध्यमान विचलन (Mean Deviation) आणि प्रमाण विचलन (Standard Deviation) सोदाहरण केलेली आहे. दोन किंवा अधिक गटांचे संयुक्त प्रमाण विचलन कसे काढावे ह्याबाबतही माहिती दिलेली आहे. संशोधनातून मिळालेल्या माहितीचे आलेख स्वरूपातही मांडणी करता येते. संख्याशास्त्रात आयतालेख (Histograph) आणि वारंवारिता बहुभुजाकृतीचा (Frequency Polygon) वापर प्रामुख्याने केला जातो. वारंवारिता विभाजन/कोष्टकावरून हे आलेख कसे काढावेत, त्यांची उपयुक्तता आणि मर्यादाही स्पष्ट केलेल्या आहेत. निर्सगातील सर्वसामान्य व्यक्तींचे किंवा घटकांचे वितरण हे प्रसामान्य संभव वक्राप्रमाणे (Normal Probability Curve) असते. या वक्राचे आकारावरून निश्चित करण्यात आलेले गुणधर्म, क्षेत्रफळावरून निश्चित करण्यात आलेले गुणधर्मही विशद केलेले आहे. परंतु प्रत्यक्ष संशोधनात प्रसामान्य वक्र मिळत नाही, त्यात विषमितता (Skewness), शिखरदोष (Kurtosis), स्थानांतर असे अनेक दोष आढळतात. हे दोष का येतात ह्याची कारणेही दिलेली आहेत. एखाद्या गटातील दोन गुणविशेषातील परस्परसंबंध काढण्यासाठी स्पिअरमनची गुणाक्रम पद्धती आणि पिअरसनचा सहसंबंध गुणांक कसा काढावा हे सोदाहरण स्पष्ट केले आहे. कच्च्या माहितीवरून वैज्ञानिक गणक यंत्राच्या साहाय्याने केंद्रीय प्रवृत्ती विचलनाची विविध मापने त्याचप्रमाणे पिअरसन (r) कसा काढावा हेही सोडवून दाखविले आहे.

आपण बी. एड. शिक्षणक्रमात मूलभूत सांख्यिकीचा अभ्यास केला असेलच. पुन्हा एकदा उजळणी म्हणून ह्या विभागाचा सविस्तर अभ्यास करा. कारण हा विभाग प्रगत सांख्यिकी या विभागाचा पाया आहे.

विभाग २ : प्रगत सांख्यिकी

संशोधकाला मूलभूत सांख्यिकी तंत्राच्या आधारे त्याच्या संशोधनातील परिकल्पनांचा स्वीकार किंवा नकाराबाबत कोणताही निर्णय घेता येत नाही. त्यासाठी त्याला प्रगत सांख्यिकीचा वापर करावा लागतो. प्रगत सांख्यिकी तंत्र अभ्यासण्यापूर्वी संशोधकाने त्यात वापरल्या जाणाऱ्या विविध संकल्पना समजावून घेणे आवश्यक आहे. स्वाधीनता मात्रा (Degree of Freedom) विश्वासांतर (Confidence-Interval), सार्थकता स्तर (Level of Significance), शून्य परिकल्पना (Null Hypothesis), सांख्यिकीची प्रमाणत्रुटी (Standard Error), एकपुच्छ, द्विपुच्छ चाचणी (One Tailed, Two Tailed test), या विविध संकल्पना या विभागात स्पष्ट केलेल्या आहेत.

संशोधकाने विविध साधनांच्या साहाय्याने एकत्रित केलेल्या सामग्रीचे विश्लेषण करण्यासाठी प्रामुख्याने परिमितीय आणि अपरिमितीय चाचण्यांचा वापर केला जातो. परिमितीय चाचण्यांमध्ये दोन माध्यमांची तुलना

करण्यासाठी टी चाचणी किंवा क्रांतिक गुणोत्तराचा वापर केव्हा करावा याबाबत माहिती देण्यात आलेली आहे. दोनापेक्षा जास्त न्यादर्श असल्यास आणि एकाच चलाचा परिणाम पाहावयाचा असल्यास एकमार्गी प्रसरण विश्लेषणाचा (One Way Anova) वापर करून दाखविला आहे. दोन किंवा दोनापेक्षा जास्त चले असल्यास द्विमार्गी प्रसरण विश्लेषण (Two Way Anova) आणि अनेक चलांसाठी वापरावयाचे बहुमार्गी प्रसरण विश्लेषणही (Multi-variate Analysis of Variance) स्पष्ट केलेले आहे. न्यादर्शाचा आकार लहान असल्यास अपरिमितीय चाचण्यांचा वापर चिन्ह चाचणी (Sign Test)) मध्यांक चाचणी (Median Test) कसा व केव्हा करावा हेही स्पष्ट केलेले आहे. परिकल्पनेचा स्वीकार किंवा त्याज्यता ठरविण्यासाठी काय स्क्वेअरचा वापर कसा करावा हे सोदाहरण दिलेले आहे. टी चाचणीला पर्याय म्हणून विलकॉक्सन मॅनव्हिटने चाचणीद्वारे परिकल्पनेची सार्थकता ठरविण्यात येते. त्याबाबतही माहिती सोदाहरण स्पष्ट केलेली आहे. संगणकाद्वारे सामग्रीचे विश्लेषण करण्यासाठी सामग्री कोणत्या स्वरूपात मांडावी. विविध मृदूसाहित्याच्या साहाय्याने तिचे विश्लेषण कसे करावे हेही स्पष्ट केले आहे. थोडक्यात या विभागाच्या साहाय्याने प्रत्येक विद्यार्थी स्वतः संशोधन कार्यातून मिळालेली सामग्रीचे विश्लेषण करून योग्य अन्वयार्थ काढू शकेल अशी अपेक्षा आहे.

संचालक
शिक्षणशास्त्र विद्याशाखा

विभाग १ : मूलभूत सांख्यिकी

अनुक्रमणिका

१.० काही प्रश्न

तुम्ही तुमच्या संशोधन कार्यामधून विविध साधनांच्या साहाय्याने माहिती एकत्रित केलेली असते. तुमच्या संशोधनाबाबतचे निष्कर्ष काढण्यासाठी या माहितीचे विश्लेषण करावे लागते. त्यासाठी तुम्हांला

विविध सांख्यिकी तंत्राचा वापर करावा लागतो. तुमच्या संशोधनातून मिळालेल्या माहितीचे विश्लेषण करण्यासाठी कोणते सांख्यिकी तंत्र वापरावे ? त्यासाठी पुढे काही प्रश्न दिलेले आहे ते वाचून त्यावर विचार करा. थोडक्यात तुमच्या संशोधन समस्येसंदर्भात उत्तरांचा शोध घ्या. पुढील सर्वच प्रश्नांची उत्तरे तुम्हांला देता येतीलच, असे नाही. ज्या प्रश्नांची उत्तरे तुम्हांला देता येत नाहीत, ती या पुस्तकामधून मिळविण्याचा प्रयत्न करा.

(१) संशोधन कार्यासाठी मी कोणती पद्धती वापरलेली आहे ?
(२) संशोधनासाठी किती न्यादर्श / नमुना निवडलेला आहे ? व तो कसा निवडलेला आहे?
(३) विविध साधनांचा वापर करून मिळालेली माहिती संख्यात्मक स्वरूपात आहे का ? तिचे विश्लेषण मी कसे करणार आहे.

या सर्व प्रश्नांची उत्तरे लिहिण्याचा प्रयत्न करा. तुमची उत्तरे पुस्तक वाचत असताना पडताळून पाहण्याचा प्रयत्न करा.

२.० तुम्ही काय मिळवाल ?

२.१ तुम्हांला गणिताचे जीवनातील स्थान स्पष्ट करता येईल.
२.२ संख्याशास्त्रीय संकल्पना स्पष्ट करता येईल.
२.३ संख्याशास्त्रीय मूलभूत प्रमाणके काढता येतील.
२.४ आलेखांचे प्रकार स्पष्ट करता येतील.
२.५ प्रसामान्य संभव वक्र संकल्पना गुणधर्म आणि त्यातील विकृती सांगता येतील.
२.६ स्पिअरमनच्या गुणानुक्रम पद्धतीने सहसंबंध गुणक काढता येईल.
२.७ पिअरसनच्या पद्धतीने सहसंबंध गुणक काढता येईल.
२.८ फिशर z चा वापर करून सरासरी सहसंबंध गुणांक काढता येईल.

३.० प्रास्ताविक

शहरातील एका प्रथितयश शाळेचा दहावीचा निकाल ८०% लागला तर दुसऱ्या शाळेचा निकाल फक्त १०% लागला. सर्व कामगारांनी एकजुटीने काम केल्यामुळे कंपनीला १५% नफा झाला. त्यातील ४% नफा कंपनीने कामगारांना दिला. भारतातील वेगवेगळ्या महत्त्वाच्या शहरातील मागील २४ तासांचे किमान आणि कमाल तापमान दूरदर्शनवर दाखविले जाते. अशी वेगवेगळी उदाहरणे सर्वांनाच माहीत आहेत. सकाळी उठण्याच्या वेळेपासून रात्री झोपेपर्यंत प्रत्येकजण आपापल्या वेळेचे नियोजन करीत असतो. म्हणजेच आपल्याला जीवन जगत असताना हरघडी कोणत्या ना कोणत्या तरी संख्येला सामोरे जावे लागते. संख्येच्या गणनेपासूनच गणित विषयाची सुरुवात झाली. गणित विषय हा मानवी इतिहासाइतकाच प्राचीन आहे. तो नैसर्गिक घटनांवर आधारित नसून मानवनिर्मित आहे. परंतु नैसर्गिक घटनांचा कार्यकारणभाव समजून घेण्यासाठी सध्या त्याचा वापर होतो.

मानवी समाजाच्या विकासात आणि प्रगतीत गणित अत्यंत महत्त्वाची भूमिका बजावत आहे हे

आपण जाणतोच. साध्या यंत्रापासून ते महासंगणकापर्यंत, जवळपासच्या प्रवासापासून ते अवकाश प्रवासापर्यंत सर्वत्र गणिताचा वापर केला जातो. गणिती कौशल्ये उपजत नसते तर ते प्रयत्नसाध्य असते, हे आपण एका उदाहरणाद्वारे पाहू या !

आईनस्टाईन यांच्या शिक्षकांनी ते शाळेत शिकत असताना असे स्पष्ट बजावले होते की, 'तुला आयुष्यामध्ये चौथीच्या पुढचे गणित कधीच शिकता येणार नाही'. परंतु आईनस्टाईनने मांडलेले सापेक्षतावादाचे सिद्धांत आधुनिक गणिताच्या उपयोजनावर आधारलेले आहेत. म्हणजेच प्रयत्न केला तर जगातील कोणत्याही व्यक्तीला गणित शिकणे सहज जमू शकते.

'परमेश्वराच्या खालोखाल मी फक्त गणितालाच मानतो' असे थोर भारतीय विचारवंत विनोबाजींनी म्हटलेले आहे.

ऑगस्ट कॉम्ट यांच्या मते 'जे वैज्ञानिक शिक्षण गणिती पायाधारे विकसित होत नाही त्या वैज्ञानिक शिक्षणाची पायाभरणी निश्चितपणे कच्ची झालेली आहे असे समजावे'.

व्हाईट या अमेरिकन विचारवंताच्या मते 'जी समाजशास्त्रे गणिताच्या आधारे विकास पावतात तीच फक्त मानवी सुधारणेचे वळण लावू शकतात आणि मानवी संस्कृतीची प्रगती करू शकतात'.

गणित या विद्याशाखेचा जसजसा विकास होत गेला तसतशा या विद्याशाखेच्या वैशिष्ट्यपूर्ण अशा विविध शाखा - उपशाखांच्या निर्मितीला प्रारंभ झाला. ह्यापैकी तशी उशिराच विकसित झालेली एक शाखा म्हणजे संख्याशास्त्र होय. कौटिल्याच्या अर्थशास्त्रातसुद्धा राज्यकारभारासाठी संख्याशास्त्रीय माहिती एकत्रित करण्याचे महत्त्व पटवून देण्यात आलेले आहे, हे आपल्याला माहीत असेलच. म्हणजेच हा विषय तसे म्हटले तर अडीच-तीन हजार वर्षांपासून अस्तित्वात आहे. इतका प्राचीन आहे.

ल्युईस या गणित तज्ज्ञाने तर असे म्हटले आहे की 'ज्या व्यक्तीला बेरीज, वजाबाकी, गुणाकार आणि भागाकार या चार मूलभूत क्रिया जमू शकतात, त्याला प्रत्येकाला संख्याशास्त्र सहजपणे शिकता येते'.

यावरून आपल्या हे लक्षात येते की, संख्याशास्त्रीय कौशल्ये प्रयत्नसाध्य आहेत. त्याचा बाऊ करण्याचे कुणालाही कारण नाही. फक्त जिद्द अंगी बाणली पाहिजे.

आपल्या दैनंदिन जीवनात घडणाऱ्या अनेक घटनांवर आपण विश्वास ठेवतो. अशीच एक घटना पाहू या.

एका जादूगाराला बंदिस्त पेटीतील वस्तू ओळखू शकण्याची शक्ती प्राप्त आहे. असे समजल्याबरोबर तुकारामने सहा सारख्या पेट्या जादूगारापुढे ठेवल्या. प्रत्येक पेटीत कोणती ना कोणती वस्तू त्याने ठेवली होती. जादूगाराने सहा पेट्यांमधील वस्तू आपल्या हातातील हाडाला पेटीवर मारून अचूक सांगितल्या. लगेचच ही बातमी संपूर्ण गावात पसरली. तरूण मुले काम न करता जादूगाराच्या भजनी लागली. ह्यावर विचार करण्यासाठी गावच्या पाटलांनी गावातील ज्येष्ठ मंडळींना एकत्रित केले. वरील घटनेवर कोणता तोडगा काढता येतील याबाबत चर्चा केली. सर्वानुमते सारख्या छत्तीस पेट्या करून घेतल्या. जादूगाराच्या मागे गावातील तरूण उभे होते त्यांना प्रत्येकाला सहा-सहा पेट्या दिल्या. त्या पेट्यांमध्ये त्यांना हवे ते सामान ठेवण्यास सांगितले. प्रत्येकाला जादूगाराला बंद पेटीतील सामान ओळखता येते का? हा अनुभव घ्यावयास सांगितला. त्यावेळी जादूगाराला एकाच्या पेटीतील पाच वस्तू दुसऱ्याच्या पेटीतील चार वस्तू तर तिसऱ्या, चौथ्या आणि पाचव्या तरुणाच्या पेटीतील अनुक्रमे तीन, दोन आणि एक अशा वस्तू बरोबर ओळखता आल्या तर शेवटच्या पेटीतील एकही वस्तू त्याला सांगता आली नाही. त्या तरुणांनी प्रत्येकाचा अनुभव इतरांना सांगितला. या प्रसंगातून गावच्या तरुणांचे डोळे उघडले आणि त्यांना जादूगाराचा नाद सोडून आपल्या दैनंदिन कामाला सुरुवात केली.

पत्रिकेवरून कोणता आजार आहे हे सांगणारे ज्योतिषी, डायबेटीस, एडस् यांसारखे आजार मी दिलेल्या औषधाने बरे होतात. असे म्हणणारा वैद्य' हे ह्याच प्रकारचे अनुभव आहेत. अनेक व्यक्ती अनेक बाबतीत दावा करताना दिसतात. साधूने, जादूगाराने, भोंदू बाबाने केलेले प्रयोग योगायोगाने (by chance) बरोबर जुळतात आणि लोक त्यावरच विश्वास ठेवतात.

एखादी घटना योगायोगाने घडली, अपघाताने घडली की काही निश्चित कारणामुळे घडली हे संख्याशास्त्राच्या साहाय्याने ठरविता येते. जर १०० पैकी कमीत कमी ९५ किंवा ९९ वेळा एखादी घटना त्याच पद्धतीने घडत असेल, सारखेच निष्कर्ष मिळत असतील तर त्यावर विश्वास ठेवण्यास हरकत नाही, असे संख्याशास्त्र सांगते.

संशोधकालाही आपले संशोधन समाजपयोगी होण्यासाठी त्याच्या संशोधनातून मिळालेले निष्कर्ष हे १०० पैकी कमीत कमी ९५ वेळा सारखेच यावयास हवेत. अन्यथा आपले निष्कर्ष हे केवळ अपघाताने किंवा योगायोगाने आलेले आहेत असे मानावे लागते. यावरून तुमच्या संशोधनातून मिळालेल्या माहितीचे निष्कर्ष काढण्यासाठी संख्याशास्त्राचे महत्त्व लक्षात येईल. ह्या दृष्टीने संख्याशास्त्राची जाण संशोधकाला असायला हवी. निदान त्यासाठी काही संख्याशास्त्रीय संकल्पना आपल्याला माहीत करून घ्यावयास हव्यात.

४.० संख्याशास्त्रीय संकल्पना

४.१ संख्याशास्त्राचा अर्थ व व्याख्या

संख्याशास्त्र हा मूळ शब्द इंग्रजीतील Statistics या शब्दासाठी वापरलेला मराठी पारिभाषिक शब्द आहे. Statistics हा शब्द ग्रीक भाषेतील Statizein या शब्दापासून व्युत्पन्न झालेला आहे. त्याचा अर्थ व्यवस्थित आखणी करणे किंवा प्रस्थापना करणे असा आहे. (To set up) संख्याशास्त्र ही प्रामुख्याने संख्यात्मक सामग्रीची मांडणी व मूल्यमापन करणारी गणिताची वैशिष्ट्यपूर्ण शाखा आहे. वेगवेगळ्या लेखकांनी केलेल्या व्याख्या अशा :

व्याख्या

जगप्रसिद्ध शब्दकोशकार सॅम्युएल जॉन्सन यांनी संख्याशास्त्राची व्याख्या पुढीलप्रमाणे केलेली आहे -

"A Science of collecting the numerical data systematically summarizing, tabulating and interpreting it".

पद्धतशीरपणे सांख्यिकी आधारसामग्री गोळा करून ती कोष्टकात सारांशरूपाने मांडणे आणि तिचा अन्वयार्थ लावणे अशा बाबींशी संबंधित असलेल्या गणिती शाखेला संख्याशास्त्र असे म्हणतात. ही गोष्ट जॉन्सनच्या व्याख्येवरून आपल्या लक्षात येते.

हिकी ए. ए. यांनी संख्याशास्त्राची व्याख्या पुढीलप्रमाणे केलेली आहे.

"Statistics is a set of procedures for collecting organizing and interpreting numerical facts or observations that are used to analyze and interpret observable phenomena".

संख्याशास्त्राचे महत्त्वही त्यांच्या व्याख्यांमधून स्पष्ट होते ते आपण सविस्तरपणे पाहू.

४.२ संख्याशास्त्राचे महत्त्व

(१) माहितीची अचूकपणे मांडणी करता येते. त्यामुळे उपयुक्तता समजण्यास मदत होते.

(२) संख्याशास्त्रीय पद्धतीमुळे विचारात सुस्पष्टता येते.

(३) वस्तुस्थितीचे ज्ञान मिळते / होते.

(४) अर्थपूर्ण व योग्य पद्धतीने निष्कर्ष मांडण्यास मदत होते.

(५) निष्कर्षांची विश्वसनीयता, वैधता आणि अचूकता ठरविता येते.

(६) भविष्यातील गोष्टींसंबंधी अंदाज करणे शक्य होते.

(७) क्षेत्रानुसार अपेक्षित निष्कर्ष किती प्रमाणात मिळतील याचा अंदाज करता येतो.

४.३ संख्याशास्त्राचे बदलते स्वरूप आणि उपयुक्तता

एक स्वतंत्र ज्ञानशाखा म्हणून संख्याशास्त्राच्या अभ्यासाला १८ व्या शतकाच्या अखेरीसच सुरुवात झाली. शैक्षणिक संख्याशास्त्राबाबत कार्ल पिअरसन या अमेरिकन संख्याशास्त्रज्ञाने ह्या शाखेची पद्धतशीरपणे मांडणी केली तर स्पिअरमन, व्हॅर्नार्न, थर्स्टोन, फिशर यांनी हा विषय प्रगतीपथावर नेला. इ.स. १९११ साली कोलकत्ता येथे आशिया खंडातील पहिली संख्याशास्त्र अभ्यास संस्था डॉ. पी. सी. महालोबनीस यांनी सुरू केली. तिचे नाव इंडियन स्टॅटिस्टिकल इन्स्टिट्यूट असे आहे. ह्या संस्थेने जगभरात एक अग्रगण्य ज्ञान संस्था म्हणून स्वतःचे नाव स्थापित केले. महान संख्याशास्त्रज्ञ डॉ. फिशरसुद्धा ह्या संस्थेत संशोधन करण्यासाठी काही वर्षे भारतात आले होते.

जीवनाच्या प्रत्येक क्षेत्रात आपल्याला हरघडी संख्याशास्त्राला सामोरे जावे लागते. संख्याशास्त्राला टाळून जीवनाच्या विविध क्षेत्रांपैकी एकही क्षेत्र आपल्याला काबीज करता येणार नाही. उदाहरण म्हणून काही क्षेत्रे पुढे दिलेली आहेत.

(१) सामाजिक आणि भौतिकशास्त्रात उपयोग

मानसशास्त्र, अर्थशास्त्र, समाजशास्त्र आणि भौतिकशास्त्र, इत्यादी अनेक ठिकाणी सरासरी, कोष्टके, आलेख अशा अनेक संख्याशास्त्रीय संकल्पनांचा उपयोग केला जातो. दर दहा वर्षांनी लोकसंख्येची जनगणना होते. त्यातून व्यवसाय गट, उत्पन्न गट, जन्मदर, मृत्यूदर, लोकसंख्या वाढीचा दर, साक्षरतेची टक्केवारी, सरासरी आयुर्मान, इत्यादी गोष्टी कळतात. लोकसंख्या आणि नैसर्गिक साधनसंपत्तीचा ताळमेळ बसविण्यासाठी राष्ट्रीय नियोजनकारांना ही माहिती खूप उपयोगी पडते. भविष्यलक्षी नियोजन तर पूर्णपणे सांख्यिकी आधारावरच बेतलेले असते.

(२) कृषिक्षेत्रात उपयोग

शेतीसारख्या विषयात संख्याशास्त्राच्या मदतीने वार्षिक धान्य उत्पादन, त्यातील वाढ आणि घट, आयात-निर्यातीचे प्रमाण ठरविण्यासाठीसुद्धा संख्याशास्त्राची खूप मदत होते. संख्याशास्त्रातील संभवनीयता या संकल्पनेचा वापर करून उत्पादनाविषयी भाकित केले जाते. त्यानुसार भविष्याचे पूर्वनियोजन केले जाते. दुष्काळ, महापूर, अतिवृष्टी, नैसर्गिक विपदा ह्यासाठी पूर्वतयारी करता येते. विपदा (आपत्ती) व्यवस्थापन तंत्रात संख्याशास्त्राचा फार मोठा उपयोग होतो.

(३) राष्ट्रीय प्रगतीमध्ये उपयुक्तता

उद्योगधंदे व व्यापार ही राष्ट्राची संपत्ती असते, तसेच तो राष्ट्राच्या अर्थव्यवस्थेचा कणा असतो. मालाचे उत्पादन करताना त्याबाबत दर्जा नियंत्रण केले जाते. दर्जेदार उत्पादन करणाऱ्या कंपन्यांना ISO प्रमाणपत्रे दिली जातात. देशाचा निर्यात व्यापार मालाच्या दर्जावर अवलंबून असतो. दर्जा हा संख्याशास्त्राच्याच साहाय्याने ठरविला जातो. गुणवत्ता नियंत्रणात अनेक सांख्यिकी निकष लावले

जातात. राष्ट्राच्या अर्थकारणातील अंदाजपत्रक तर संख्याशास्त्रीय दस्तऐवजच असतो. आयात-निर्यात, व्यापार, आर्थिक धोरण ठरविणे, गुंतवणूक, निर्गुंतवणूक अशा अनेक घटकांमध्ये पदोपदी संख्याशास्त्राचा संबंध येतो.

(४) माहिती तंत्रविज्ञानात संख्याशास्त्राचा उपयोग

संगणक तंत्रविज्ञानाचा मूलभूत पाया शून्य आणि एक अशा दोन संख्यांवर आधारलेला आहे. संगणकाच्या साहाय्याने माहितीची देवाणघेवाण चालते. तेथे अंकीय संकेत (डिजिटल सिग्नल्स) अत्यावश्यक असतात. माहितीचे महाजाल उर्फ इंटरनेटची देवाणघेवाण ही तर अंकीय संकेताशिवाय शक्यच नाही.

एकंदरीत जीवनातील कोणतेही क्षेत्र संख्याशास्त्रापासून अलिप्त राहू शकत नाही, हे आपल्या लक्षात आले. परंतु या संख्याशास्त्रालाही मर्यादा आहेत आणि या मर्यादेचे भान ठेवून त्याचा केलेला वापरच सर्वाधिक फायदेशीर ठरतो.

४.४ संख्याशास्त्राच्या मर्यादा

संख्याशास्त्राचे नियम मांडताना व्यक्तीचा व्यक्ती म्हणून विचार केला जात नाही तर व्यापक समाजाचा - लोकसंख्येचा एक सामान्य घटक म्हणून व्यक्तीचा विचार केला जातो.

उदाहरणार्थ, भारताचे एकूण राष्ट्रीय उत्पन्न लक्षावधी कोटी रुपयांमध्ये सांगितले की, त्यावरून आपल्या देशातील प्रत्येक व्यक्ती खूप श्रीमंत आहे, असे वाटते पण या देशातील ४०% लोकांना दोन वेळचे जेवणसुद्धा मिळू शकत नाही. ते दारिद्र्य रेषेखालचे जीवन जगत आहेत तर काही लोकांना संपत्ती सुरक्षित ठेवण्यासाठी तिजोऱ्या अपुऱ्या पडत आहेत, हे आपणा सर्वांना माहीतच आहे.

जगप्रसिद्ध विनोदी लेखक मार्कट्वेन म्हणत -

'संख्याशास्त्रज्ञ ही जगातील सर्वाधिक खोटारडी माणसे असतात' तर बर्नाड शॉ खोटे ह्या शब्दाचा तरतमभाव सांगताना 'झूठ, सफेद झूठ और संख्याशास्त्र' असा शेरा मारत असत.

प्रयोगासाठी / संशोधनासाठी वापरलेल्या न्यादर्शावरून संपूर्ण जनसंख्येबाबतचे सामान्यीकरण करणे अनेक वेळा अशक्य असते. पण संख्याशास्त्रात तसे प्रयोग / संशोधने केली जातात. त्यामुळे अनेकांना संख्याशास्त्र हा आकड्यांचा केलेला खेळ असे वाटते.

पण संख्याशास्त्रावर जरी टीका होत असली तरी संख्याशास्त्र मूळात वाईट नाही. फक्त त्यातील योग्य-योग्यता जाणून घेण्याची क्षमता प्रत्येक व्यक्तीमध्ये असणे आवश्यक आहे. वाईट संख्याशास्त्रापासून बचाव करण्याचा एकमेव मार्ग म्हणजे खरे संख्याशास्त्र जाणून घेणे होय. आजमितीला आपली संस्कृतीही सांख्यिकी संस्कृती झाली आहे.

४.५ शिक्षणक्षेत्रात संख्याशास्त्राचा वापर

शिक्षणासंबंधी प्रकाशित होणारे बहुसंख्य लेख, पत्रके, मासिके, वार्षिके, पुस्तके आणि ग्रंथांमध्ये संख्याशास्त्राचा सढळ वापर केलेला असतो. शिक्षकाला नवीन विचारधारा समजावून घेण्यासाठी संख्याशास्त्र माहीत असणे, समजणे आवश्यक असते. शिक्षकी पेशा हा व्यवसाय आहे. आजच्या शाळेतील उद्याचा समाज वर्गावर्गातून शिक्षकच घडवत असतो. कृती संशोधनाच्या साहाय्याने, शिक्षक स्वत: वेगवेगळ्या समस्यांवर मात करू शकतो.

शैक्षणिक वाङ्मय समजण्यासाठी, स्वत:च्या उच्च शिक्षणासाठी, व्यावसायिक विकासासाठी, शैक्षणिक तत्त्वांचा आधार समजण्यासाठी, विविध कसोट्यांचा प्रायोगिक-वापर करण्यासाठी संख्याशास्त्राचा उपयोग होतो.

जनगणना, लोकसंख्या शिक्षण, साक्षरता प्रसार, आरोग्य शिक्षण, इत्यादी पूरक सामाजिक कार्ये करण्यासाठी त्यातून स्वत:च्या देशाला सन्मान आणि प्रतिष्ठा मिळवून देण्यासाठी संख्याशास्त्राचा शिक्षकांना उपयोग होतो. शैक्षणिक संशोधन करून, सुप्त योजनांची कार्यवाही करण्यासाठी आणि आपल्या मताच्या समर्थनार्थ पुरावे देण्यासाठी शिक्षक व शैक्षणिक कार्यकर्त्याला संख्याशास्त्राचा खूप उपयोग होतो.

सर्वसामान्य माणसाला वाटते तसे संख्याशास्त्र मुळीच कठीण, किचकट नाही. प्राथमिक अंकगणित आणि बीजगणित येणाऱ्या प्रत्येक व्यक्तीला, शिक्षकाला संख्याशास्त्र सहज शिकता येते.

म्हणून संख्याशास्त्र- विषयीची सविस्तर माहिती पुढे दिलेली आहे आणि संशोधकाच्या संशोधनाला महत्त्व प्राप्त व्हावे असे वाटत असेल तर त्याने संख्याशास्त्र शिकले पाहिजे, वापरले पाहिजे म्हणून या पुस्तकाचे दोन विभाग केलेले आहेत.

विभाग १ : मूलभूत / पायाभूत सांख्यिकी

विभाग २ : प्रगत सांख्यिकी

ज्या व्यक्तींना, शिक्षकांना व विद्यार्थ्यांना संख्याशास्त्राची पार्श्वभूमी नाही त्यांनी प्रथम विभाग १ अर्थात मूलभूत सांख्यिकी समजावून घेणे अत्यावश्यक आहे. त्यानंतरच प्रगत सांख्यिकी ह्या भागाचा अभ्यास करावा. म्हणजे सांख्यिकीच्या वापरातील सफाईदारपणा तुम्हांला सहज जमू शकेल. ज्यांना संख्याशास्त्राचे प्रारंभिक ज्ञान आहे, त्यांनी सरळ प्रगत संख्याशास्त्राकडे वळायला हरकत नाही.

४.६ संख्याशास्त्राचे प्रकार

संख्याशास्त्र ही अतिशय वेगाने प्रगत होणारी आणि दिवसेंदिवस अधिकाधिक समृद्ध होणारी गणिती शाखा आहे. कोणत्याही शाखेचा आवाका वाढल्यानंतर तो समजण्यास सोयीचे व्हावे म्हणून तिचे उपशाखांमध्ये, उपप्रकारांमध्ये वर्गीकरण केले जाते. हे विस्तारण ज्ञानरूपी वृक्षाच्या एखाद्या मोठ्या फांदीला फुटलेल्या विविध फांद्यांप्रमाणे असते.

शैक्षणिक क्षेत्रात उपयोगात आणल्या जाणाऱ्या संख्याशास्त्राचे तीन प्रमुख प्रकार मानलेले आहेत. ते आकृती क्र. १ मध्ये दाखविलेले आहे.

संख्याशास्त्राचे प्रकार

वर्णनात्मक सांख्यिकी Descriptive Statistics	अनुमानात्मक सांख्यिकी Inferential Statistics	भाकितात्मक सांख्यिकी Predictive Statistics

आकृती १ : संख्याशास्त्राचे विविध प्रकार

यांपैकी ज्याला प्राथमिक संख्याशास्त्र समजावून घ्यावयाचे आहे, त्याला वर्णनात्मक संख्याशास्त्रापासूनच सुरुवात करावी लागते. किंबहुना तो सर्व संख्याशास्त्रीय ज्ञानाचा पाया आहे.

म्हणून प्रथम आपण वर्णनात्मक सांख्यिकीबाबतची माहिती अभ्यासू या. त्यानंतर अनुमानात्मक व भाकितात्मक सांख्यिकीचा विचार करू या !

(१) वर्णनात्मक सांख्यिकी

या प्रकारात प्राधान्याने संख्यात्मक स्वरूपात माहिती गोळा केली जाते. त्यानंतर तिचे कोष्टक स्वरूपात, आकृती स्वरूपात (आलेखात्मक) रूपांतर केले जाते. या रूपांतरित माहितीवर केंद्रीय प्रवृत्ती (Central Tendency), विचलन (Variability), शततमक (Percentile), सहसंबंध गुणांक (Correlation), इत्यादी मूलभूत सांख्यिकी मापनांची माहिती तयार केली जाते.

> वर्णनात्मक सांख्यिकीमुळे अनुमानात्मक आणि पूर्वकथनात्मक सांख्यिकीच्या अभ्यासाचा पाया तयार होतो. विभाजनाची वर्णनात्मक माहिती म्हणजे काय? किती? अशा प्रश्नाचे उत्तर मिळते. विभाजनाची सरासरी किती ? विचलनाचे स्वरूप कोणते ? दोन संचांमध्ये सहसंबंध कोणता आहे ? इत्यादी प्रश्नांची उत्तरे मिळतात.

(२) अनुमानात्मक सांख्यिकी

याला नमुनाविषयक (न्यादर्श) सांख्यिकी (Sampling Statistic) असेही म्हणतात. कोणत्याही संशोधकाला किंवा संशोधक गटाला संपूर्ण जनसंख्येचे मापन करणे अशक्य असते. परिणामी न्यादर्शाच्या (जनसंख्येचा प्रातिनिधिक असलेला जो छोटा गट मापनासाठी निवडतात त्याला न्यादर्श म्हणतात) आधारे केलेल्या अभ्यासावरूनच जनसंख्येसंबंधी निष्कर्ष मांडावे लागतात. ही अनुमानेच असतात. १००% अचूक ठरलेले सिद्धांत नसतात. न्यादर्शाच्या मापनावरून संपूर्ण जनसंख्येच्या मापनासंबंधी केलेला तो अंदाज असतो. संपूर्ण जनसंख्येच्या नेमक्या मापनापर्यंत जाण्याचा तो प्रयत्न असतो. त्यामुळे असे निष्कर्ष नेहमी सापेक्ष असतात. निरपेक्ष नसतात.

> अनुमानात्मक सांख्यिकीमध्ये न्यादर्श विभाजन, विविध मापनाच्या प्रमाणत्रुटी, संभाव्यता, इत्यादींच्या आधारे परिकल्पनांचे परीक्षण केले जाते.

(३) भाकितात्मक सांख्यिकी

प्रायोगिक निष्कर्षांची अचूकता आणि त्यातील योगायोगाचा परिणाम वजा करून सत्यतेच्या जवळ जाण्याचा व भविष्यकालीन गोष्टीविषयीचा अंदाज बांधण्याचा प्रयत्न भाकितात्मक सांख्यिकीतून करण्यात येतो. संशोधनकर्त्याने मांडलेली भाकिते / परिकल्पना यांची सत्यअसत्यता अजमावण्यासाठी क्रांतिक गुणोत्तर परीक्षिका, टी-परीक्षिका, एफ-परीक्षिका, काय-स्क्वेअर परीक्षिकांचा वापर केला जातो. उत्तराचे भाकित करताना सत्य उत्तराचे विश्वासांतर आणि सार्थकता स्तरसुद्धा सांगितला जातो. विश्वासांतर आणि सार्थकता स्तर ह्या संकल्पना विभाग - २ मध्ये स्पष्ट केलेल्या आहेत.

> भाकितात्मक सांख्यिकीमध्ये प्राप्त परिस्थितीचे विश्लेषण करून भविष्यकालीन गोष्टींविषयी अंदाज मांडले जातात, हे एक प्रकारचे वैज्ञानिक भविष्य कथनशास्त्र असते.

हे संख्याशास्त्रीय विश्लेषण करण्यासाठी आधारसामग्रीची आवश्यकता असते. आधारसामग्री म्हणजे काय आणि तिचे प्रकार कोणते ते प्रथम समजून घेऊ.

४.७ आधारसामग्रीचे प्रकार

सर्व प्रकारच्या संख्याशास्त्राचा मुख्य आधार अंकात्मक स्वरूपात मांडलेली माहिती (Quantitative data) हाच असतो म्हणून संख्याशास्त्रात तिला आधारसामग्री असे म्हणतात. सर्व संख्याशास्त्राचा प्रारंभ आधारसामग्रीतूनच होतो. ही सामग्री मिळविण्यासाठी विविध साधनांचा वा चाचण्यांचा वापर केलेला असतो त्याला मापनाच्या तऱ्हा किंवा मार्ग असे म्हणतात. या विविध मार्गांमधून सामग्री वेगवेगळ्या स्वरूपात मिळते. हे मार्ग मापन श्रेणींच्या मदतीने ठरविलेले असतात. मापन श्रेणी ह्या प्रामुख्याने चार प्रकारच्या आहेत. काही ठिकाणी श्रेणीऐवजी 'शलाका' ही संज्ञासुद्धा वापरतात. ह्या श्रेणी आकृती क्र. २ मध्ये दाखविल्या आहेत.

मापन श्रेणी

नामांकन श्रेणी (Nominal Scale)	क्रमाकन श्रेणी (Ordinal Scale)	अंतर श्रेणी (Interval Scale)	गुणोत्तर श्रेणी (Ratio Scale)

आकृती २ : मापन श्रेणींचे प्रकार

या श्रेणी आपण कळत-नकळत वापरतो पण त्यामागची शास्त्रीय बैठक आपण समजून घेऊ या.

(१) नामांकन श्रेणी (Nominal Scale)

संशोधनासाठी संशोधक माहिती गोळा करतो. त्या माहितीचे वर्गीकरण करतो आणि त्यांच्या वैशिष्ट्यांनुसार नावे देतो. उदाहरणार्थ, संशोधनात किती मुले व किती मुलींचा समावेश आहे हे ठरविण्यासाठी संशोधक त्यांची गुणवैशिष्ट्ये निश्चित करून त्यांचे वर्गीकरण करतो. मुले ह्या गटातील सर्व घटक समकक्ष मानले जातात. 'मुली' ह्या गटातील सर्व घटक समकक्ष मानले जातात मात्र मुलगे आणि मुली हे समान होऊ शकत नाही. मुलांची संख्या ४० आणि मुलींची संख्या ४२ असेल तर आपण त्यांची बेरीज करू शकत नाही. दोन्ही गट हे स्वतंत्रच मानावे लागतात. हे गट केल्यानंतर आपण त्यांना संख्या, चिन्ह अशी नावे देतो. उदाहरणार्थ, मुलींचा गट - अ, मुलांचा गट - ब हे अक्षर किंवा अंक उलटे केले तरी त्यामुळे कोणताही बदल होत नाही. नामांकनामध्ये बेरीज, वजाबाकी, गुणाकार व भागाकार करता येत नाही.

संख्या, चिन्ह किंवा नावे यांचा उपयोग करून नामांकन श्रेणी तयार होते. या प्रकारातील घटक समानतेच्या संबंधाचा वापर करून एकत्र केलेले असतात. *(म्हणजेच गटातील घटक समान दर्जाचे मानले जातात. कोणताही घटक दुसऱ्यापेक्षा श्रेष्ठ किंवा कनिष्ठ नसतो.)* ही समानता दाखविण्यासाठी बरोबरच्या चिन्हाचा वापर करतात. जर एका न्यादर्शात A, B, C, D हे घटक असतील तर (A = B = C = D). उदाहरणार्थ, निरक्षर लोकांचा गट, रेल्वे स्टेशनवरील हमाल.

नामांकन श्रेणीमध्ये वापरलेली नावे, संख्या वा संकेत यांची अदलाबदल केली तरी आधारसामग्रीत काही फरक पडत नाही.

(२) क्रमांकन श्रेणी (Ordinal Scale)

विश्वसुंदरी स्पर्धेमध्ये जे क्रमांक दिले जातात ते त्यांच्या सौंदर्याच्या निरीक्षण झालेले मताच्या आधारे दिले जातात. जरी १, २, ३ असे क्रमांक असले तरी पहिल्या विश्वसुंदरीचे सौंदर्य, दुसऱ्या युवतीचे सौंदर्य किंवा तिसऱ्या युवतीचे सौंदर्य ह्यात सारखाच फरक असतो असे नाही. काळी वेळेस पहिल्या आणि दुसऱ्या क्रमांकाच्या युवतींच्या सौंदर्यात फारसा फरक नसतो. परंतु विश्वसुंदरी २ व ३ मध्ये बरेच अंतर असते. तसेच ऑलम्पिकमध्ये धावपटूंना क्रमांक देताना पहिल्या दोन धावपटूंमधील वेळेचा फरक हा सेकंदात असतो तर पुढच्या धावपटूंमधील फरक हा मिनीटाचाही असू शकतो. म्हणजेच त्यांच्यातील अंतर हे सारखेच नसते. परंतु स्पर्धेच्या निकषांच्या आधारे त्यांना क्रमांक दिले जातात. त्या क्रमाकांत समान अंतर असले तरी प्रत्यक्षात ते तसे नसते.

या श्रेणीमध्ये गटातील घटक सारख्याच दर्जाचे असले तरी क्रमांक देताना त्यांच्यातील गुणवत्ता, क्षमता, **संख्या**, दर्जा, श्रेणी इत्यादींमध्ये असलेल्या थोड्या फार फरकाचा विचार करूनच त्यांचे क्रमांकन केले जाते. ***(म्हणजेच क्रमांकन करताना समानतेमधील असमानतेचा विशेषत्वाने विचार केला जातो. म्हणून तिला नामांकन श्रेणीची पुढची पायरी असेही म्हणतात.)*** उदाहरणार्थ, भारतीय क्रिकेट संघात सचिन तेंडूलकर एक क्रमांकाचा खेळाडू, सौरभ गांगुली दोन क्रमांकाचा आणि द्रविड तीन क्रमांकाचा खेळाडू असे म्हटले जाते. परंतु सचिन आणि सौरभमध्ये जेवढे अंतर आहे त्यापेक्षा कितीतरी जास्त अंतर सौरभ आणि द्रविडमध्ये आहे. तर दीप दासगुप्ता ११ व्या क्रमांकावर असतो.

केंद्रीय व राज्य मंत्रिमंडळात मुख्यमंत्री / पंतप्रधान पहिल्या क्रमांकाचे, गृहमंत्री / उपमुख्यमंत्री दुसऱ्या क्रमांकाचे धरले जाते. उदाहरणार्थ, वर्गातील विद्यार्थ्यांमध्ये उत्तम, चांगला, साधारण, बरा आणि वाईट अशा पद्धतीने शिक्षकाकडून क्रमांकन केले जाते.

या श्रेणीमध्ये वरच्या गटात कमाल गुणवत्ता असते तर खालच्या गटात किमान गुणवत्ता असते. १, २ व ३ अशा क्रमामध्ये असे अंतर समान वाटत असले तरी अंतर समान नसते.

असमानतेचा संबंध दर्शविण्यासाठी ..... च्यापेक्षा जास्तसाठी > चिन्ह तर यापेक्षा कमी < असे चिन्ह वापरतात.

उदाहरणार्थ, विश्वसुंदरी १ चे सौंदर्य > विश्वसुंदरी २ चे सौंदर्य

(३) अंतर श्रेणी (Interval Scale)

आपण वेगवेगळ्या ऋतूंमध्ये सेंटिग्रेड किंवा फॅरेनहाइटमध्ये तापमान मोजतो. उन्हाळ्यात ते ४०-४५° पर्यंत जाते तर हिवाळ्यात कधी-कधी ते शून्याच्याही खाली जाते. त्यावेळी पाण्याचा बर्फ होतो. प्रत्येक व्यक्तीला बुद्धिमत्ता असते. ती बुद्ध्यांकाने मोजतात. उदाहरणार्थ, १०० बुद्ध्यांक ११० बुद्ध्यांक ह्या ठिकाणी ४०°c व ४१°c तापमानातील अंतर व ४१°c व ४२°c तापमानातील अंतर हे सारखे असते किंवा १०० ते ११० या बुद्ध्यांकातील अंतर व ११०-१२० बुद्ध्यांकातील अंतर सारखेच असतो. त्यामुळे बेरीज, वजाबाकी ह्यांसारख्या क्रिया करता येतात. मात्र असे असले तरी श्रेणीमध्ये खरा शून्य (True zero) नाही. या श्रेणीत बेरीज-वजाबाकी करता येते. परंतु गुणाकार व भागाकार करता येत नाही. ह्या श्रेणीत अंतर जरी समान असले तरीही ८० बुद्धिगुणांक असणाऱ्या विद्यार्थ्यापेक्षा १०० बुद्धिगुणांक असणारा विद्यार्थी जितका हुशार त्यामानाने १२० बुद्धिगुणांक असणाऱ्या विद्यार्थ्याच्या तुलनेत १४० बुद्धिगुणांक असणारा विद्यार्थी अतिशय हुशार असतो.

एखाद्या गटातील सर्व घटकांमधील परस्पर अंतराची निश्चित कल्पना येत असेल तर त्या श्रेणीला अंतर श्रेणी असे म्हणतात. ***(या श्रेणीमध्ये क्रमांकन श्रेणीचे गुणधर्म असतातच पण त्या जोडीला लागोपाठच्या क्रमांकामधील अंतरसुद्धा निश्चित केलेले असते.)***

या श्रेणीमध्ये प्रारंभ बिंदू निश्चित करता येत नाही. अंतर प्रमाणित असते.

(४) गुणोत्तर श्रेणी (Ratio Scale)

१ किलो ग्रॅम वजन हे १ ग्रॅम वजनाच्या १००० पट असते. १ मिनिट हे १ सेकंदाच्या साठ पट असते.

ह्या पद्धतीने मिळणारी आधारसामग्री ही सर्वाधिक निर्दोष व अचूक असते. भौतिकशास्त्रामध्ये याच आधारसामग्रीचा वापर केला जातो. दोन मूल्यांचे गुणोत्तर निरपेक्ष असते आणि ते निश्चित अंकांनि दर्शविता येते.

(गुणोत्तर श्रेणीमध्ये अंतर श्रेणीची सर्व वैशिष्ट्ये असतात तसेच तिचा वास्तव प्रारंभबिंदू शून्य असतो. तिच्यामध्ये समानतेचा व असमानतेचा गुणधर्म असतो. परंतु त्या जोडीला दोन अंतरामधील गुणोत्तरसुद्धा माहीत असते.)

या श्रेणीमध्ये शून्य हा प्रारंभबिंदू असतो. दोन अंतरातील गुणोत्तराचे मापन करता येते.

विविध श्रेणीसाठी कोणत्या सांख्यिकी तंत्रांचा वापर करावा, हे थोडक्यात कोष्टक क्र. १ मध्ये दिलेले आहे.

मापन श्रेणी	*वैशिष्ट्ये*	*सांख्यिकी तंत्राचा वापर*
नामांकन श्रेणी	● समान वैशिष्ट्यांच्या आधारे वर्गीकरण करून गट ओळखले जातात. ● बेरीज, वजाबाकी गुणाकार, भागाकार करता येत नाही.	बहुलक, काय स्क्वेअर $(\chi)^2$ शततमक इत्यादी.
क्रमांकन श्रेणी	● कमी-जास्त, लहान मोठे यांसारखे मापन करण्यासाठी वापर केला जातो बेरीज, वजाबाकी गुणाकार, भागाकार करता येत नाही.	बहुलक, शेकडेवारी, मध्यांक $(\chi)^2$ काय स्क्वेअर, स्पिअरमनचा सहसंबंध इत्यादी.
अंतर श्रेणी	● सर्व घटकांमधील अंतराची निश्चित कल्पना असते.	बहुलक, मध्यमान, प्रमाणविचलन, टी परीक्षिका, एफ परीक्षिका, पिअरसनचा सहसंबंध, इत्यादी.

मापन श्रेणी	वैशिष्ट्ये	सांख्यिकी वापर
गुणोत्तर श्रेणी	● दोन घटकांतील फरकाचा निश्चित आकार असतो. ● शून्यबिंदू हा कल्पित असतो. त्याचे नेमके स्थान माहीत नसते. ● बेरीज-वजाबाकी करता येते. गुणाकार व भागाकार करता येत नाही. ● समानतेचा संबंध असतो. ● खरा शून्यबिंदू हा प्रारंभ बिंदू असतो. ● बेरीज, वजाबाकी गुणाकार, भागाकार करता येतो.	शततमक, विचलन, प्रसरण, विश्लेषण व इतर सांख्यिकी ठरविण्यासाठी

कोष्टक १ : श्रेणींची वैशिष्ट्ये आणि सांख्यिकी तंत्राचा वापर

श्रेणींचे विविध प्रकार, त्यांची वैशिष्ट्ये आणि त्या त्या श्रेणीतील गुणांकाचे विश्लेषण करण्यासाठी कोणती सांख्यिकी तंत्र वापरता येते हेही अभ्यासले.

विविध श्रेणीतील चलांचे विश्लेषण करण्यासाठी संशोधनात विविध चाचण्यांचा वापर केला जातो. संशोधनातून मिळालेले गुणांक अंतर किंवा गुणोत्तर श्रेणीतील असतील, न्यादर्श मोठा असेल आणि विभाजन हे प्रसामान्य वक्राप्रमाणे असेल त्यावेळी विश्लेषणासाठी परिमितीय चाचण्यांचा वापर केला जातो. जर संशोधनातून मिळालेले गुणांक हे नामांकन किंवा क्रमांकन श्रेणीतील असतील न्यादर्श लहान असेल आणि विभाजन हे विपरित असेल त्यावेळी विश्लेषणासाठी अपरिमितीच्या चाचण्यांचा वापर केला जातो.

या चाचण्यांबाबतची सविस्तर माहिती प्रगत सांख्यिकीमध्ये देण्यात आलेली आहे.

संख्याशास्त्रात मापन संख्यांच्या स्वरूपात केले जाते. या संख्या वरीलपैकी कोणत्याही मापनश्रेणीतील असू शकतात. या आधारसामग्रीत संख्यांचे विश्लेषण करण्यासाठी प्रथम त्यांचे वर्गीकरण करणे आवश्यक ठरते. हे वर्गीकरण कसे करावे, हे आता आपण समजून घेऊ या.

४.८ आधारसामग्रीचे वर्गीकरण

परीक्षेतील गुण, सेंटिमीटरमध्ये मोजलेली उंची, किलोग्रॅममधील वजन, पळण्याच्या शर्यतीत लागलेला सेकंदामधील वेळ, इत्यादी प्रकारच्या मापन संख्यांना संख्याशास्त्रात गुणांक (Score) असे म्हणतात आणि अशा अनेक गुणांकांचा मिळून गुणांक तक्ता तयार होतो.

प्रमाणित मापन श्रेणीने मोजलेली आणि आकड्याच्या स्वरूपात एककासह असलेली कोणतीही माहिती म्हणजे संख्याशास्त्रीय गुणांक होय. गुणांकांचा समूह वा संच म्हणजे गुणांक तक्ता / संच होय.

एखाद्या गटाचे गुणांक जेव्हा एकत्रित स्वरूपात, किंवा गटरूपाने मांडले जातात तेव्हा त्याला गुणांक संच असे म्हणतात. ह्या गुणांकांच्या मालिका असतात. या मालिकेतील कोणत्याही गुणांकाचा अर्थ लावताना त्या समुहातील इतर गुणांक, त्या गटाची सरासरी, गुणांकाचे स्थान, इत्यादी अनेक बाबी लक्षात घ्याव्या लागतात. गुणांकांच्या श्रेणी दोन प्रकारच्या असतात. त्या आकृती क्र. ३ मध्ये दाखविलेल्या आहेत.

गुणांक श्रेणी

अखंडित श्रेणी (Continuous Series)

खंडित श्रेणी (Discrete OR Discontinuous Series)

आकृती ३ : गुणांक श्रेणींचे प्रकार

(१) अखंडित श्रेणी

तापमापीवर जेव्हा तापमान मोजले जाते तेव्हा २५°c आणि २६°c यामध्ये अपूर्णांकातील तापमानसुद्धा समाविष्ट असते. २४.५०°c ते २५.४९°c चे सर्व तापमान २५°c मध्ये समाविष्ट होते. तर २५.५०°c ते २६.४९°c हे सर्व तापमान २६°c मध्ये समाविष्ट असते. **अखंडित श्रेणीतील गुणांकाची मोजदाद होते. त्यावेळेला त्यामध्ये खंड पडलेला नसतो. गुणांक सातत्याने एकमेकांशी संलग्न असतात.**

अखंडित श्रेणीमध्ये गुणांक अपूर्णांकात येऊ शकतात. शैक्षणिक संख्याशास्त्रामधील बहुसंख्य गुणांक श्रेणी ह्या अखंडित मालिकाच असतात आणि त्यांचाच समाजशास्त्रांमध्ये अधिकाधिक उपयोग केला जातो.

(२) खंडित श्रेणी

एका गावाची लोकसंख्या ५,००० आहे आणि त्या गावात एक मूल जन्माला आले तर गावाची लोकसंख्या एकदम ५००१ होईल. मध्यंतरी कोणताही अपूर्णांक असणार नाही तसेच भारतात प्रतिकुटुंब सरासरी ३.७३% मुले आहेत, असे म्हणता येईल. परंतु या गटातील, प्रत्येक कुटुंबातील मुलांची संख्या मात्र अपूर्णांकात कधीही असणार नाही. कारण प्रत्येक कुटुंबात तीन तरी मुले असतील किंवा चार तरी मुले असतील. साधारणपणे लोकसंख्येची मोजदाद करताना अशा प्रकारच्या खंडित मालिकांचा वापर केला जातो. *(मानसशास्त्र, शिक्षणशास्त्रामध्ये त्यांचा फारसा उपयोग होत नाही.)*

ज्या गुणांक श्रेणीमध्ये खंड पडलेला असतो. एका गुणांकानंतर पुढच्या गुणांकामध्ये मध्यंतरी काहीच नसते अशा श्रेणींना खंडित श्रेणी असे म्हणतात.

संख्याशास्त्रात गुणांकाची मर्यादा लक्षात घेणे हे फ़ार महत्त्वाचे असते. गुणांकाच्या मर्यादा सांगण्याच्या दोन पद्धती आहेत. पहिल्या प्रकारात त्या अंकापासून तर पुढचा अंक येण्याच्या अगोदरचा मोठ्यात मोठा अपूर्णांक ही त्या गुणांकाची मर्यादा मानली जाते. उदाहरणार्थ, ६० वर्षाच्या व्यक्तीचे वय हे ६० वर्षे पूर्णपासून ६० वर्ष ११ महिने व ६१ व्या जन्मतारखेच्या आदल्या दिवसापर्यंत असे मानले जाते. व्यवहारात जरी अशी गुणांक मर्यादा मान्य केली जात असली तरी प्रत्यक्ष वापरासाठी मात्र दुसरीच पद्धत वापरली जाते. उदाहरणार्थ, विद्यार्थ्याचा बुद्धिगुणांक १५० आहे. याचा अर्थ, तो १४९.५ ते १५०.५० या दरम्यानचा गुणांक आहे यालाच गुणांकाची निचतम आणि उच्चतम मर्यादा (Lower and upper limits) असे म्हणतात आणि यामुळेच आपणांस गुणांकाची अखंडित मालिका मिळू शकते. निचतम मर्यादा लक्षात घेताना त्या गुणांकातून ०.५ वजा करावयाचे असतात तर उच्चत्तम मर्यादा लक्षात घेताना त्या गुणांकात ०.५ मिळवावयाचे असतात. येथे एकच प्रश्न निर्माण होतो. जर गुणांक १५०.५० असेल तर पूर्णांक कोणता घ्यावयाचा म्हणून १४९.५० ते १५०.४९ पर्यंत १५० हा गुणांक घ्यावयाचा तर १५०.५० ते १५१.४९ पर्यंत १५१ गुणांक घ्यावयाचा एवढे लक्षात ठेवले की, मग आकडेमोड करताना संशोधकाचा कोणत्याही प्रकारचा गोंधळ होत नाही. या संख्यात्मक माहितीचे वर्गीकरण करताना विशिष्ट पद्धत वापरावी लागते.

४.९ संख्यात्मक माहितीचे वर्गीकरण

संख्याशास्त्रीय माहिती ही प्राधान्याने सुट्या गुणांकाच्या स्वरूपात मिळत असते अशा आधारसामग्रीला असामूहिक माहिती (Ungrouped data) किंवा सुटे प्राप्तांक असे म्हणतात. जोपर्यंत गट लहान असतो म्हणजेच सुट्या प्राप्तांकाची उदाहरणार्थ, संशोधकाने घेतलेल्या पथदर्शक अभ्यासातून विद्यार्थ्यांचे मिळालेले प्राप्तांक पुढीलप्रमाणे आहेत. ४०, ५०, ६०, ७०, ८०. या गुणांकाची सरासरी आपणास सहज सांगता येते. परंतु प्रत्यक्ष संशोधन कार्यासाठी समजा ३० विद्यार्थ्यांची निवड केली. या ३० विद्यार्थ्यांना पुढीलप्रमाणे गुण मिळालेले आहे. या गुणांची सरासरी पटकन काढणे अवघड जाते.

५०	४५	६०	७०	७५	८०
९०	४६	४५	५५	६५	८५
४७	४९	५७	६३	६८	७८
८३	८७	९०	६६	६७	६४
६६	५५	७७	८८	८९	४५

गट मोठा असल्यामुळे , प्राप्तांकांची संख्या खूप जास्त होती. त्यामुळे त्यांचा मागोवा अर्थात, अनुधावन (Follow-up) व सांख्यिकीय प्रक्रिया संशोधकाला सहज करता येत नाही. संशोधकाला त्याची एका दृष्टिक्षेपात पाहणी करता येत नाही. अशा वेळी ह्या आधारसामग्रीचे गट पाडावे लागतात. शास्त्रीय पद्धतीने गुणांक समूहाचे गट पाडण्याच्या पद्धतीला सामूहिक माहिती (Grouped data) किंवा गुणांकाचे वर्गीकरण असे म्हणतात. त्यासाठी गटातील गुणांकाचे काळजीपूर्वक निरीक्षण करून त्यांची विभागणी ठरावीक गटसंख्येत करावी लागते.

वरील तीस विद्यार्थ्यांना मिळालेले गुणांचे / प्राप्तांकांचे वर्गीकरण पुढील पद्धतीने करता येईल.

या गुणांकावलीत

(१) सर्वात जास्त गुण ९० आहेत. तर सर्वात कमी गुण ४५ आहेत.

(२) कमाल आणि किमान गुणांकातील फरक हा ९० - ४५ = ४५ आहे.

(३) या गुणांकावलीचे जर पाच समान गट तयार करावयाचे असतील तर

$$\frac{\text{कमाल आणि किमान गुणांकातील फरक}}{५} \quad \frac{४५}{५} = ९$$

(४) म्हणजे १० अंतराचा एकेक गट होईल तो असा.

४१-५० ५१-६० ६१-७० ७१-८० ८१-९०

(५) संशोधकाकडे असलेल्या तीस विद्यार्थ्यांचे गुण कोणत्या गटात किती विद्यार्थी आहेत त्याची नोंद करता येईल. ही नोंद करताना चार गुणाकांसाठी उभी रेष तर पाचव्या गुणासाठी त्या चार रेषांवर तिरपी रेष काढल्यास मोजणे सोपे जाते. ह्यात ४१-५० च्या दरम्यान सात गुणांक आहेत तर ५१ ते ६० च्या दरम्यान चार गुणांक आहेत. हेच कोष्टक क्र. २ मध्ये दाखविले आहे.

गट	विद्यार्थी संख्या	
४१-५०	$\cancel{||||}$ ||	(०७)
५१-६०	||||	(०४)
६१-७०	$\cancel{||||}$ |||	(०८)
७१ - ८०	||||	(०४)
८१ - ९०	$\cancel{||||}$ ||	(०७)

कोष्टक २ : गटानुसार गुणांक नोंद

आपण तयार केलेले कोष्टक आहे. त्या कोष्टकात -

(१) पहिल्या स्तंभात जे अंतर निर्धारित केलेले आहे ते अंतर विविध गटात लिहिलेले आहे.

(२) दुसऱ्या स्तंभात त्या त्या अंतरात येणाऱ्या गुणांकाच्या रेषा काढलेल्या आहेत.

(३) तिसऱ्या स्तंभात त्या रेषा अंक स्वरूपात मांडलेल्या आहेत.

लक्षात ठेवा

वर्गांतराची लांबी वाढविली असता वारंवारिता वाढते. परंतु गटांची संख्या कमी होते. तर वर्गांतराची लांबी कमी केली असता वारंवारिता कमी होते,परंतु गटांची संख्या वाढते.

संख्याशास्त्रात यालाच असामूहिक माहितीचे सामूहित माहितीत रुपांतर करणे असे म्हणतात. या वर्गीकरणाचे अनेक फायदे होतात. ते संख्याशास्त्राच्या भाषेत आपण समजावून घेऊ.

(अ) वर्गीकरणाचे फायदे

★ वर्गीकरणामुळे संपूर्ण समूह गुणांक पुन्हा पुन्हा पाहण्याची गरज पडत नाही. प्रत्यक गुणांक लक्षात ठेवण्याचीही गरज राहत नाही.

★ शोधन प्रक्रिया मर्यादित जागेत आणि वेळेत केंद्रीत करता येते.

★ गटातील सर्वात मोठा गुणांक, सर्वात छोटा गुणांक, गटाचा विस्तार अशा अनेक प्रश्नांची उत्तरे देता येतात.

उदाहरणार्थ, १०० विद्यार्थ्यांच्या गटात गणितामध्ये १०० पैकी ६० गुणांक मिळविणारा विद्यार्थी कधी खूप हुशार, कधी सर्वसामान्य तर कधी कनिष्ठ दर्जाचासुद्धा असू शकतो. त्यासाठी गटामध्ये गुणांकाचे विभाजन कसे झालेले आहे हे पाहावे लागते.

(आ) वारंवारिता विभाजन कोष्टक

जेव्हा आधारसामग्रीचे गटामध्ये विभाजन केले जाते. म्हणजेच सामूहिक माहिती (Grouped data) मध्ये रूपांतर केली जाते. तेव्हा त्याला वर्गीकरण (Classification) असे म्हणतात. तर प्रत्येक गटात जितके गुणांक येतात त्या संख्येला गटाची वारंवारिता असे म्हणतात. वारंवारिता गटापुढे मांडून आधारसामग्रीचे कोष्टक तयार करण्याच्या पद्धतीला सारणीकरण असे म्हणतात. अशा पद्धतीने असामूहिक माहितीचे गटवार पद्धतीने कोष्टकात रूपांतर करण्याच्या तंत्राला वारंवारिता विभाजन कोष्टक तयार करणे असे म्हणतात.

या वारंवारिता विभाजन कोष्टकाची तीन महत्त्वाची अंगे आहेत. ती अशी -

(१) वर्गांतरे (Class Intervals)

(२) संकेत खुणा-चिन्हे (Tally Marks)

(३) वारंवारिता (Frequencies)

वरील उदाहरणात जे तीन स्तंभ केलेले आहेत त्यातील पहिल्या स्तंभाला वर्गांतरे दुसऱ्या स्तंभाला संकेत खुणा - चिन्हे तर तिसऱ्या स्तंभाला वारंवारिता असे म्हणतात.

यावरून संशोधकाच्या वरील आधारसामग्रीचे कोष्टक ३ पुढीलप्रमाणे तयार होईल.

वर्गांतरे	संकेत चिन्हे	वारंवारिता
४१-५०	𝍸 ||	०७
५१-६०	||||	०४
६१-७०	𝍸 |||	०८
७१ - ८०	|||	०४
८१ - ९०	𝍸 ||	०७

कोष्टक ३ : वारंवारिता विभाजन

याच कोष्टकाला वारंवारिता विभाजन कोष्टक असे म्हणतात. प्रत्येक स्तंभाबाबतची सविस्तर माहिती आता आपण पाहू.

(१) वर्गांतरे (Class Intervals)

वारंवारिता विभाजन कोष्टकाच्या सोयीसाठी तयार केलेल्या गुणांकाच्या छोट्या गटाला वर्गांतर असे म्हणतात. वर्गांतरातील एकूण गुणांक संख्येस वर्गांतराची लांबी किंवा वर्गांतराचा आकार असे म्हणतात. त्यासाठी CI हा संकेत वापरतात. वरील उदाहरणात वर्गांतराचा आकार १० आहे.

साधारणपणे एखाद्या समूहाचे वर्गांतराप्रमाणे जेव्हा गट पाडले जातात तेव्हा वारंवारिता विभाजन कोष्टकात लागोपाठची किमान पाच वर्गांतरे आणि कमाल वीस वर्गांतरे असावीत म्हणजे आधारसामग्रीचे योग्य दिग्दर्शन होते. विभाजन प्रातिनिधिक आणि व्यवस्थित होते. वर्गांतराची सुरुवात गटातील सर्वात लहान गुणांकाने होते आणि वर्गांतराचा शेवट गटातील सर्वात मोठ्या गुणांकाने होतो. वर्गांतराच्या प्रारंभीच्या गुणांकामध्ये ०.५ वजा करून वर्गांतराची सुरुवात गृहीत धरतात. वर्गांतराच्या शेवटच्या गुणांकामध्ये ०.५ मिळवून वर्गांतराचा अंतिम गुणांक ठरविला जातो. याला वर्गांतराची निचतम मर्यादा power limit (ll) आणि वर्गांतराची उच्चतम upper limit (ul) मर्यादा असे म्हणतात. वरील उदाहरणात वर्गांतराची निचतम मर्यादा ४०.५ आणि उच्चतम मर्यादा ९०.५ अशी आहे.

वर्गांतराच्या उच्चतम आणि निचतम मर्यादेतील अंतराला वर्गांतराची लांबी असे म्हणतात. वर्गांतराची निचतम मर्यादा आणि उच्चतम मर्यादेला दोनने भागल्यानंतर येणाऱ्या गुणोत्तराला वर्गांतराचा मध्यबिंदू किंवा वर्गांतरमध्य असे म्हणतात. तो Xm ह्या संकेताने दाखवतात. वरील उदाहरणात ६१ ते ७० चा वर्गांतर मध्य हा ६५.५० असा आहे.

वारंवारिता विभाजन कोष्टक तयार केल्यानंतर प्रत्येक सुटा गुणांक आपल्याला माहीत राहू शकत नाही. म्हणून वर्गांतर मध्यालाच त्या गटाचा प्रातिनिधिक गुणांक असे संबोधून आकडेमोड केली जाते. निष्कर्ष मांडले जातात.

वर्गांतराची लांबी ठरविताना ती २, ३, ५, १०, २० अशा पद्धतीने ठरवितात. म्हणजे आकडेमोड सोपी होते. *(त्यातही १० किंवा १० च्या पटीत लांबी घेतली तर आकडेमोड आणखी सोपी होते.)*

संख्याशास्त्रातील अंक हे **निश्चितांक** नसून **सापेक्ष अंक** असतात.

प्रत्येक अंकाची किंमत दोन प्रकारे लिहिता येते. (ती अशी १० ची किंमत म्हणजे ९ ते ९.९९ किंवा ९.५ ते १०.५) आपण संशोधनासाठी ज्या गुणमापन श्रेणी वापरतो त्यामध्ये पूर्णांक गुणांकच विचारात घेतले जातात आणि गुणांकाची मर्यादा त्या गुणांकापेक्षा ०.५ गुणांक पुढे-मागे या पद्धतीने ठरविली जाते. संख्याशास्त्रात प्रत्येक गुणांकाची नोंद घेतली जाते. यासाठी कोणताही गुणांक एकापेक्षा अधिक वर्गांतरात मोजला जाणार नाही अशी खबरदारी घेऊन वर्गांतरे लिहावी लागतात. नाही तर ०-१० व १०-२० अशी वर्गांतरे लिहिली तर १० हा गुणांक कुठे नोंदवायचा ? असा प्रश्न निर्माण होईल. सर्व वर्गांतरे समान लांबीचीच असावी लागतात. तसेच लागोपाठच्या वर्गांतरात सातत्य असावे लागते. मधले वर्गांतर गाळता येत नाही. म्हणून वर्गांतराची लांबी ५ असेल आणि मोजण्यासाठी सुरुवात केलेला गुणांक शून्य असेल तर त्या गटाची वर्गांतरे पुढीलप्रमाणे होतील. ० ते ४, ५ ते ९, १० ते १४. येथे ० ते ४ ही वर्गांतर लांबी ४ नसून ५ आहे. ० ह्याचा अर्थ - ०.५ ते + ०.५ असा होतो.

तसेच शून्यापासून चारपर्यंत आपणांस एकूण पाच संख्या मोजाव्या लागतात. म्हणून १० ते १४ या वर्गांतराची लांबी काढताना १० व्या गुणांकाची सुरुवात ९.५० आणि १४ या गुणांकाचा शेवट १४.५० आहे, हे लक्षात घेऊनच -

वर्गांतराची लांबी = १४.५ - ९.५ = ५ अशा प्रकारे वर्गांतर लांबी मोजली पाहिजे.

तुम्हांला तुमच्या संशोधनात प्रत्येक विद्यार्थ्याचे / व्यक्तीचे गुण मिळालेले असतील त्यामुळे तो अनेक सुट्या गुणांकाचा समूह असेल त्यालाच असामूहिक माहिती असे म्हणतात. या गुणांकांना विविध सांख्यिकी प्रमाणके लावून त्यांचा अर्थ लावण्यासाठी त्यांचे सामूहिक माहितीत रूपांतर करावे लागते. यासाठी तुम्हांला पुढील पाच पायऱ्यांनुसार जावे लागेल. तरच माहितीचे पृथःक्करण नीट होईल. या पायऱ्या समजावून घेत असताना सोबत तुमचे गुणांक घ्या. ते पायऱ्यांनुसार मांडण्याचा प्रयत्न करा.

पायरी १ : गटाचा आकार निश्चितीकरण

या पायरीत तुमच्याकडील गुणांकावलीतील गुणांकांची संख्या मोजून एकूण गुणांक किती आहेत, ह्याची प्रथम नोंद करावी यालाच गटाचा आकार (Size) असे म्हणतात. संख्याशास्त्रात तो दाखविण्यासाठी (N) या अद्याक्षराचा वापर करतात.

उदाहरणार्थ, संशोधनातून मिळालेल्या तुमच्या गुणांकावलीत ५० गुणांक असतील तर N = 50 **असे नोंदवावे.**

पायरी २ : गुणांक विस्तार निश्चितीकरण

गुणांकावलीतील सर्वात मोठा (उच्चतम) आणि सर्वात लहान (निचतम) गुणांक नोंदवावा. या दोन्ही गुणांकाच्या फरकावरून आपणांस गटाचा गुणांक विस्तार काढता येतो.

गटाचा गुणांक =	गटातील		गटातील
विर्स्तार	उच्चतम	-	निचतम
	गुणांक		गुणांक

गुणांक विस्ताराला Range असे म्हणतात. तो R या अद्याक्षराने दर्शविला जातो.

समजा, तुम्ही १०० गुणांकापैकी चाचणी घेतलेली असेल. त्यातील उच्चतम गुणांक ९५ आणि निचतम गुणांक ०७ इतका असेल तर

गटाचा विस्तार R = ९५ - ०७ = ८८ इतका येईल.

पायरी ३ : वर्गांतर लांबी निश्चितीकरण

गुणांक विस्ताराचे साधारणत: १० च्या जवळपास गट पडतील अशा तऱ्हेने वर्गांतराची लांबी निश्चित करावी. त्यामुळे पुढील आकडेमोड करणे सुलभ होते.

$$\text{वर्गांतराची लांबी} = \frac{\text{गुणांक विस्तार}}{\text{अपेक्षित गट}}$$

आपण अभ्यासण्यासाठी घेतलेल्या गुणांक समूहाच्या बाबतीत -

$$\text{वर्गांतराची लांबी} = \frac{८८}{१०} = ८.८$$

वर्गांतराची लांबी कधीही अपूर्णांकात घेत नाहीत. जवळचा पूर्णांक म्हणून ही लांबी आपणांस नऊ इतकी घेता येईल. पण ती ९ ऐवजी १० घेतली तरी फारसा फरक पडणार नाही. तसेच वर्गांतर मांडताना आपण एकदम ७ पासून सुरुवात करणार नाही. कारण कोणतेही संपादन ही जवळपास शून्यापासून सुरू होते. म्हणून ही वर्गांतरे आपणांस ०-९, १०-१९, ९० ते ९९ अशी मांडता येतील आणि सर्व दृष्टीने ती मांडणी सोयीस्कर होईल.

पायरी ४ : कोष्टकीकरण

(१) वर्गांतर निश्चित झाले की, तीन उभे रकाने असलेले कोष्टक तयार करावे. सर्वप्रथम पहिल्या रकान्यात वर्गांतरे सुरुवातीपासून शेवटपर्यंत अखंडितपणे लिहून घ्यावीत.

(२) संकेत खुणा-चिन्हे (Tally Marks)

वर्गांतरानंतरच्या कोष्टकातील, दुसऱ्या रकान्यास संकेत खुणा-चिन्हे असे नाव दिले जाते. त्यानंतर गुणांकावलीतील एक एक गुणांक मोजून त्याचा प्रातिनिधिक म्हणून त्या त्या वर्गांतरापुढे प्रत्येकी एक उभी रेघ ओढावी. (Tally Mark) तो गुणांक पुन्हा मोजला जाऊ नये, त्यासाठी टॅली मार्क मांडल्यावर गुणांकावर तिरपी रेघ मारावी. प्रत्येक वर्गांतरामध्ये १ किंवा त्यापेक्षा जास्त गुणांकाची रेखाचिन्हे येतात. तेव्हा चार उभी रेखाचिन्हे आडवे मांडून झाल्यानंतर पाचव्या गुणांकाचे रेखाचिन्ह मांडून एक गुच्छ तयार करावा व त्यापुढे स्वल्पविरामाचे चिन्ह मांडावे. वर्गांतरातील रेखाचिन्हांची संख्या मोजताना एक गुच्छ म्हणजे पाच गुणांक अशा पद्धतीने मोजणी सोपी होते.

(३) वारंवारिता (Frequencies)

प्रत्येक वर्गांतरात रेखाचिन्हांची जी एकूण संख्या येते तिला त्या वर्गांतराची वारंवारिता असे म्हणतात. प्रत्येक वर्गांतरापुढे तिसऱ्या उभ्या रकान्यात त्याची वारंवारिता संख्येच्या स्वरूपात नोंदवावी. वारंवारितेसाठी Frequency (f) असे संकेत वापरतात. वारंवारितेची बेरीज गटाच्या आकाराइतकी आल्यास तुम्ही मांडलेली रेखाचिन्हे बरोबर आहेत असे समजावे. Σ (Sigma) हा वैश्विक संकेत

बेरीज करणे या अर्थाने सर्व गणित व विज्ञान शाखांत वापरला जातो. थोडक्यात, विभाजन विनचूक झालेले असेल तर $N = \sum f$ येईल. आणि हा पडताळा करता आला तरच आधारसामग्रीचे वर्गीकरण निर्दोष झाले असे समजावे.

थोडक्यात, वारंवारिता विभाजन कोष्टक तयार करताना पुढील क्रमाने एकूण पाच गोष्टी कराव्यात.

(१) गटातील व्यक्तीसंख्या (N) गटाच्या गुणांक विस्ताराची (R) किंमत शोधणे.
(२) वर्गांतरे निश्चित करून तीन उभ्या रकान्याचे कोष्टक तयार करावे. पहिल्या रकान्यात वर्गांतरे मांडणे.
(३) गुणांकवलीतील एकेक गुणांक मोजून त्याबद्दल योग्य वर्गांतरासमोरच्या दुसऱ्या रकान्यात संकेतचिन्हाच्या रेखा मांडाव्या.
(४) प्रत्येक वर्गांतरातील रेखाचिन्हांची संख्या मोजून त्या संख्या प्रत्येक वर्गांतरासमोर वारंवारिता म्हणून मांडावी.
(५) सर्व वर्गांतरातील वारंवारितेची बेरीज N इतकी येते का याचा पडताळा पाहावा. $(N = \Sigma f)$.

सरावासाठी स्वाध्याय

पुढील गुणांकाचे वारंवारिता विभाजन कोष्टकात रूपांतर करा.

१०	२०	३८	४०	५०	४५
७०	८०	७५	७७	९०	५५
५८	६९	७८	४८	६८	३५
४५	८५	६८	५५	४२	४३
४८	४९	३३	३४	८२	८७

वारंवारिता विभाजन कोष्टकावरून निष्कर्ष मांडण्यासाठी संशोधकाला संख्याशास्त्रीय मापनाचा वापर करावा लागतो. पुढील भागात आपण त्याबाबतची सविस्तर माहिती घेणार आहोत.

पूर्वीच्या काळी लांबी मोजण्यासाठी हाताच्या वितीचा वापर केला जात असे, परंतु प्रत्येकाची वित सारखी नसल्यामुळे मापन अचूक होत नव्हते. नंतरच्या काळात फूट, मीटर अशी लांबी मोजण्याची विविध मापन साधने उपलब्ध झाली. पूर्वीच्या काळी गुंजाच्या साहाय्याने सोने मोजले जात असे सर्व गुंजांचे वजन सारखेच असते असे मानले जात असे. परंतु त्यात अचूकता नव्हती आज सोने तोळे / ग्रॅममध्ये मिली ग्रॅममध्येही मोजले जाते. यावरून आपल्याला असे म्हणता येईल की, काही साधनांच्या साहाय्याने आपल्याला अचूक मापन करता येते तर काही साधनांच्या साहाय्याने मापन केल्यास त्यात अचूकता कमी असते. तुमच्या संशोधनामध्येही तुम्ही जी संख्यात्मक सामग्री एकत्रित केलेली आहे. त्या माहितीचे स्वरूप कसे आहे. त्यावर प्रक्रिया कशी करावयाची, त्या गटाचा प्रतिनिधित्व करणारा गुणांक कोणता आहे हे ठरविण्यासाठी लांबी आणि वजनासाठी जशी विविध मापन साधने वापरली जातात तशीच संख्याशास्त्रातसुद्धा प्रतिनिधित्व गुणांक ठरविण्यासाठी भूयिष्टक, मध्यांक आणि मध्यमान अशी विविध मापन साधने वापरली जातात त्यांना केंद्रीय प्रवृत्ती असे म्हणतात. त्यातील भूयिष्टक मापने ढोबळ तर मध्यमान अचूक निदान करतात. गटातील व्यक्तीचे प्रतिनिधित्व करणाऱ्या व्यक्तीपासून कमी अधिक प्रमाणात दूर पसरलेले असतील यालाच संख्याशास्त्रात विचलन असे म्हणतात. संख्याशास्त्रात केंद्रीय प्रवृत्ती मोजण्यासाठी जशी विविध मापन साधने वापरली जातात तशीच विचलनाचे मापन करण्यासाठी विस्तार, चतुर्थक विचलन, प्रमाणविचलन अशी विविध मापन साधने वापरली

जातात. यातील काही विस्तार या मापन साधनांद्वारे ढोबळ स्वरूपात तर प्रमाणविचलन या मापन साधनांमुळे अचूक माहिती प्राप्त होते.

एखाद्या वस्तूच्या गुणवैशिष्ट्यांचे निरीक्षण व मापन करूनच आपण तिचे वर्णन करीत असतो.

उदाहरणार्थ, एखाद्या लाकडी पट्टीचे वर्णन आपल्याला पुढीलप्रमाणे करता येईल. पट्टीची लांबी सहा इंच आहे. तर त्या पट्टीचे वजन पट्टीच्या गुरुत्वमध्यावर कळू शकेल. ह्याप्रमाणे एखाद्या गुणांकाच्या समूहाचे वर्णन करावयाचे असेल तर कोणती गुणवैशिष्ट्ये ठरवावी लागतील असा प्रश्न उपस्थित होईल. मग जशी फूटपट्टीची लांबी तसेच गुणांकावलीतील सर्वात कमी गुणांक आणि सर्वात जास्त गुणांक यांतील फरक / विस्तार / विचलनशीलता. पट्टीचे वजन जसे आपण गुरुत्वमध्यावर मोजतो तसेच या गटाचे प्रतिनिधित्व करणारा गुणांक मध्यवर्ती प्रवृत्ती कोणती ज्याला आपण नेहमीच्या भाषेत सरासरी म्हणतो. गुणांकाचा विस्तार आणि त्यांची मध्यवर्ती प्रवृत्ती दाखविणारा गुणांक ही दोन वैशिष्ट्ये गुणांक समूहाचे वर्णन करताना द्यावे लागते. त्यावरूनच त्या समूहाची सुस्पष्ट कल्पना यायला मदत होते.

मध्यवर्ती प्रवृत्ती आणि विचलनशीलता यांपैकी फक्त एकाची माहिती असली तर आपल्याला गटाची पूर्ण ओळख होणार नाही ते पुढील उदाहरणांवरून समजावून घेऊ. १,७,८,९,१० या गुणांकावलीतील फरक हा १०-१ = ९ आहे. परंतु, प्रत्यक्षात एकच विद्यार्थी कमी गुण मिळविणारा आहे. बहुतांशी विद्यार्थी जास्त गुण मिळविणारे आहेत. विस्तारावरून १ ते १० पर्यंत गुण मिळविणारे विद्यार्थी या गटात आहेत असा निष्कर्ष काढला तर तो चुकीचा होईल. त्याचप्रमाणे ४० ते ६० च्या दरम्यान असणाऱ्या गुणांक समूहाची सरासरी ५० येते तर १० ते १०० च्या दरम्यान असणाऱ्या गुणांक समूहाची सरासरी ही ५० येते. यावरून पहिल्या गटात बहुतांशी विद्यार्थी सारखे असतील ते एकजीव / एकजिनसी असतील. परंतु दुसऱ्या गटातील विद्यार्थी हे अत्यंत हुशार ते मतिमंद अशा सर्व प्रकारचे असतील त्यामुळे हा गट एकजीव नाही बहुजिनसी आहे. म्हणजेच केवळ केंद्रीय प्रवृत्तीच्या साहाय्याने किंवा केवळ विचलनशीलतेच्या साहाय्याने आपल्याला गटाचे वर्णन करता येत नाही. तर वर्णन करण्यासाठी केंद्रीय प्रवृत्ती आणि विचलनशीलता ही दोन्ही गुणवैशिष्ट्ये संशोधकाने मोजणे आवश्यक आहे.

५.० संख्याशास्त्रीय मापने / प्रमाणके

वारंवारिता विभाजन कोष्टक तयार करूनही गटाची स्पष्ट कल्पना संशोधकाला येत नाही. गटाचे संपादन कोणत्या दर्जाचे आहे याचाही अंदाज येऊ शकत नाही म्हणून संख्याशास्त्रामध्ये वारंवारिता विभाजन कोष्टक तयार झाल्यानंतर त्यावर विविध संस्कार करावे लागतात. ते संस्कार म्हणजे - केंद्रीय प्रवृत्ती, विचलनशीलता, सहसंबंध गुणांक, प्रचलन विश्लेषण, इत्यादी या संस्काराबाबतची सविस्तर माहिती पुढे देण्यात आलेली आहे..या प्रत्येक संस्कारामधून संशोधकाला त्याच्या संशोधनातील माहितीचे विविध पद्धतीने अन्वयार्थ लावता येतात. संशोधनाची उद्दिष्टे साध्य झाली किंवा नाही हे पडताळून पाहता येते. गटावर इतर प्रगत मापने वापरण्यापूर्वी त्या गटाची केंद्रीय प्रवृत्ती आणि विचलनशीलता ही आवश्यक मापने काढावी लागतात. त्याबाबतची माहिती प्रत्येक संशोधकाला असणे आवश्यक असते. म्हणून संशोधनाच्या माहितीचे विश्लेषण करण्याच्या दृष्टीने आवश्यक असलेली माहिती व तंत्रे आपण शिकण्यास सुरुवात करणार आहोत.

५.१ केंद्रीय प्रवृत्ती (Central Tendency)

भारतात कमी-जास्त उंचीचे लोक आहेत. तरीदेखील भारतीयांची सर्वसाधारण उंची किती असा प्रश्न उपस्थित होतो. अशावेळी भारतीयांच्या उंचीचे प्रतिनिधित्व करणाऱ्या व्यक्तीची उंची शोधावी

लागेल. व ती सरासरी उंची असते. त्यास आपण दैनंदिन जीवनात सरासरी असे म्हणतो व ही प्रतिनिधित्व करणारी मध्यवर्ती किंवा केंद्रीय प्रवृत्ती असते.

समूहातील गुणांकांची बेरीज करून त्या बेरजेला गुणांकांच्या संख्येने भागीले असता गटाची सरासरी काढता येते. ही गोष्ट प्राथमिक शाळेत अंकगणितातून तुम्ही लहानपणीच शिकलेले आहात. या पद्धती व्यतिरिक्तही संख्याशास्त्रात गटाची केंद्रीय प्रवृत्ती काढण्याच्या इतर काही पद्धती आहेत.

केंद्रीय प्रवृत्ती म्हणजे दिलेल्या समूहाचा वास्तव प्रातिनिधिक गुणांक होय.

केंद्रीय प्रवृत्ती काढण्याच्या तीन निरनिराळ्या पद्धती आहेत. त्या अशा -

(१) भूयिष्टक/बहुलक Mode (२) मध्यांक Median (३) मध्यमान Mean (सरासरी)

(१) भूयिष्टक / बहुलक (Mode)

एखाद्या गुणांक समूहात सर्वाधिक वेळा येणाऱ्या गुणांकास त्या गटाचे भूयिष्टक असे म्हणतात. या पद्धतीसाठी कोणतीही आकडेमोड, गुणांकाची रचना करावी लागत नाही. केवळ निरीक्षण करून एका दृष्टिक्षेपात भूयिष्टक काढता येते.

X = २२, ४०, ३०, ४७, २१, २८, १९, २५, ४७, ३१, २५, २५

∴ भूयिष्टक = २५

(२५ हा गुणांक सर्वाधिक म्हणजे ३ वेळा आलेला आहे.)

बहुलकाचा वापर केव्हा करावा ?

(१) अत्यंत कमी वेळात केंद्रीय प्रवृत्तीची किंमत हवी असेल तर.

(२) कामचलाऊ, जुजबी स्वरूपाची केंद्रीय प्रवृत्ती पाहिजे असेल तर.

(३) कोणत्या वस्तूंचा, निरनिराळ्या स्वरूपात खप अथवा वापर जास्तीत जास्त हे पाहावयाचे असेल तर

(४) गटाची नव्हाळी (Fashion), सर्वाधिक वेळा येणारा गुणांक जाणून घ्यायचा असेल तर.

परंतु संशोधनामध्ये केंद्रीय प्रवृत्तीच्या या मापनाचा फारसा वापर केला जात नाही.

बहुलकामुळे मिळणारे केंद्रीय प्रवृत्तीचे मापन हे ढोबळ व जुजबी असते. त्यामुळे ते संशोधनातील संख्याशास्त्रीय विश्लेषणासाठी वापरता येत नाही. कारण टोकांच्या गुणांकाचा बहुलकावर विपरित परिणाम होऊन चुकीची अनुमाने काढली जातात.

सरावासाठी स्वाध्याय

पुढील गुणांकावलीतील बहुलक शोधा.

५,७,१८,१८,१९,२०,२०,१५,११,२०

(२) मध्यांक Median - (Mdn)

गुणांक मालेतील गुणांक चढत्या किंवा उतरत्या क्रमाने एकापाठोपाठ मांडले तर बरोबर मध्यभागी येणारा गुणांक म्हणजे गटाचा मध्यांक होय. त्याला मध्यमा म्हणतात.

मध्यांक काढताना गटाचे दोन समान भाग करावे लागतात. दोन समान भाग ज्या बिंदूपाशी म्हणजेच गुणांकापाशी होतात तो गुणांक गटाचा मध्यांक दर्शवितो. संशोधनामध्ये गटाची संख्या सम किंवा विषम असू शकते. म्हणून मध्यांक काढण्यासाठी / मध्यांकाचा क्रमांक ठरविण्यासाठी -

$\frac{N+1}{2}$ हे सूत्र वापरतात.

हा मध्यस्थानी येणाऱ्या गुणांकाचा क्रमांक असतो. गुणांक हे प्रथम चढत्या किंवा उतरत्या क्रमाने लावावे लागतात. नमुन्यादाखल पुढील उदाहरण पाहू या !

उदाहरण १ :

X = ४, ३, ७, २, ५, १, ८, ६, ९

गुणांक प्रथम चढत्या क्रमाने लावल्यानंतर

X = १, २, ३, ४, ५, ६, ७, ८, ९ येथे N = ९

$$\text{मध्यांकाचा क्रमांक} = \frac{N+१}{२} = \frac{९+१}{२} = ५$$

गटातील ५ व्या क्रमांकाचा गुणांक म्हणजे ५ हा गुणांक होय. ∴ मध्यांक = ५.

येथे मध्यांकाचा क्रमांक ५ आहे. आणि मध्यांकाचे उत्तर ही ५ गुणांक आहे.

उदाहरण २ :

X = २२, ४०, ३०, ४७, २१, २८, १९, २५, ४७, ३६, २५, २५

N = १२

चढता क्रम

X = १९, २१, २२, २५, २५, २५, २८, ३०, ३६, ४०, ४७, ४७

$$\text{मध्यांकाचा क्रमांक} = \frac{N+१}{२} = \frac{१२+१}{२} = ६.५$$

या गटात ६.५ क्रमांक असलेला गुणांक नाही. परंतु सहाव्या क्रमांकावर २५ आणि सातव्या क्रमांकावर २८ गुणांक आहे. ६.५ हा क्रमांक ६ आणि ७ या क्रमांकाच्या बरोबर मध्यभागी असतो.

म्हणून ६.५ या स्थानी असणारा

$$\text{गुणांक} = \frac{२५ + २८}{२} = २६.५ \text{ आहे.}$$

हा सरासरीचा नियम वापरून शोधता येते.

> संशोधनात मिळणारे गुणांक जरी पूर्णांकात असले तरी केंद्रीय प्रवृत्तीचे मापन अपूर्णांकात येऊ शकते, हे लक्षात ठेवावे. मध्यमान आणि मध्यांकांची उत्तरे पूर्णांकाच्या जोडीला अपूर्णांकातही येऊ शकतात. तसेच उत्तर हे गटातील किंवा गटाबाहेरील गुणांकही असू शकते हेही लक्षात ठेवावे.

सरावासाठी स्वाध्याय

पुढील गुणांकावलीचा मध्यांक शोधा.

५, १०, १५, २०, २५, ३०, ३५.

(अ) वारंवारिता विभाजन कोष्टकावरून मध्यांक काढण्याची पद्धती

वारंवारिता विभाजन कोष्टक अर्थात सामूहिक माहितीवरून मध्यांक काढणे.

जेव्हा वारंवारिता विभाजन कोष्टक स्वरूपात वर्गांतरे आणि वारंवारिता दिलेल्या असतात, तेव्हा अर्थातच मोठ्या न्यादर्शाची संख्यात्मक माहिती संकलित केलेली असते आणि वर्गांतरे ही चढत्या किंवा उतरत्या क्रमानाचे मांडलेली असल्यामुळे पुन्हा गुणांक चढत्या किंवा उतरत्या श्रेणीनुसार मांडण्याची गरज नसते. फक्त बरोबर मध्यभागीचा गुणांक नेमका कुठे असेल, हे शोधून काढण्यासाठी त्याचे स्थान ठरविण्यास आपण सुट्या गुणांकावलीत अर्थात असामूहिक माहितीत जे $\frac{N+1}{2}$ हे सूत्र वापरतो. त्याऐवजी $\frac{N}{२}$ हे सूत्र वापरले जाते. कारण N जितका मोठा होत जातो, त्या प्रमाणात $\frac{N+1}{2}$ आणि $\frac{N}{2}$ यामधील अंतर कमी कमी होत जाते आणि फार मोठ्या गुणांक समूहाच्या बाबतीत $\frac{N+1}{2}$ आणि $\frac{N}{2}$ ह्यांच्यातील फरक अगदी क्षुल्लक व दुर्लक्षणीय असतो. म्हणजे मध्यांक काढताना खरोखर आपण बरोबर मधल्या क्रमांकाच्या व्यक्तीचा गुणांक शोधून काढीत असतो. $\frac{N}{२}$ ह्या सूत्राने आपल्याला बरोबर मध्यभागाच्या व्यक्तीचा क्रमांक किंवा स्थान समजते पण त्या स्थानी असलेल्या व्यक्तीचा गुणांक शोधून काढण्यासाठी एका सांख्यिकी संकल्पनेचा आधार घ्यावा लागतो. तिलाच संचयी / संकलित वारंवारिता (Cumulative Frequency) CF असे म्हणतात. ही वारंवारिता मोजताना आपणांस सर्वात लहान वर्गांतरापासून सुरुवात करावी लागते आणि पुढील वर्गांतरात (Succedding class intervals) मागील सर्व वर्गांतराची (Preceding class intervals) वारंवारिता मिळवावी लागते. समजा, १०-१९ हे सुरुवातीचे वर्गांतर असेल आणि त्याची वारंवारिता ४ असेल तर त्याची संचयी वारंवारितासुद्धा ४ + ० = ४ इतकी होते. कारण त्याच्यापूर्वी लहान असलेले वर्गांतरही नाही. त्यामुळे वारंवारिताही नाही पण समजा १०-१९ या वर्गांतरानंतर २०-२९ हे पुढील वर्गांतर आहे आणि त्याची वारंवारिता ७ इतकी असेल तर या वर्गांतराची संचयी वारंवारिता = ७ + ४ = ११ इतकी होईल याचा अर्थ असा की, ह्या गुणांकावलीत १० - २९ पर्यंत गुणांक असलेल्या ११ व्यक्ती आहेत. म्हणजेच संचयी वारंवारितेचा अर्थ लावताना त्या गटाच्या सुरुवातीच्या गुणांकापासून दिलेल्या वर्गांतराच्या अंतिम गुणांकापर्यंत गटात किती व्यक्ती येतात, हे संचयी वारंवारितेने आपणांस कळू शकते. अशा प्रकारे प्रत्येक पुढील वर्गांतरामध्ये मागील सर्व वर्गांतराची संचयी वारंवारिता मिळवून त्या वर्गांतराची संचयी वारंवारिता मांडावयाची असते. $\frac{N}{2}$ मुळे मध्यांक काढण्यासाठी आपल्याला किती संचयी वारंवारिता आवश्यक आहे, हे कळू शकते आणि ती संख्या ज्या वर्गांतरात आढळते ते मध्यांकाचे वर्गांतर असते. म्हणजे मध्यांकाचे येणारे उत्तर कोणत्याही परिस्थितीत ह्या मध्यांक वर्गांतराच्या सुरुवातीपेक्षा लहान असू शकत नाही किंवा ह्या वर्गांतराच्या अंतिम गुणांकापेक्षा मोठे असू शकत नाही. परिणामी उत्तराच्या सीमा निश्चित होतात आणि आपली आकडेमोड अचूक आली किंवा नाही, हे तपासून पाहता येते. संचयी वारंवारिता मांडताना केलेली मोजणी अचूक आहे का, हे पाहण्यासाठी गटातील व्यक्तींची संख्या N = सर्वात मोठ्या वर्गांतराची संचित वारंवारिता ह्या पडताळणी नियमाचा वापर करावा.

वारंवारिता विभाजन कोष्टकावरून मध्यांक शोधण्यासाठी पुढील सूत्र वापरतात.

$$\text{Mdn} = L + \left[\frac{\left(\frac{N}{2} - F_b \right)}{fm} \right] \times i$$

येथे

L = मध्यांक असलेल्या वर्गांतराचा सुरुवातीचा गुणांक

N = गटातील व्यक्तींची संख्या

F_b = मध्यांक वर्गांतरापूर्वी असलेल्या एकूण संचयित वारंवारिता.

fm = मध्यांक वर्गांतरातील नुसत्या वारंवारिता

i = वर्गांतराची लांबी

हे आपण एका उदाहरणाच्या मदतीने समजावून घेऊ.

वर्गांतर (CI)	*वारंवारिता (f)*	*संचयी वारंवारिता (CF)*
१२०-१३९	५०	१,०००
१००-११९	१५०	९५०
८०-९९	५०० *fm*	८००
६०-७९	२५०	३०० F_b
४०-५९	५०	५०
N = १०००		

कोष्टक क्र. ४ : वर्गांतरे, वारंवारिता आणि संचित वारंवारिता

आता मध्यांकाचे स्थान किंवा क्रमांक =

$$\frac{N}{२} = \frac{१०००}{२} = ५००$$

L = ७९.५

F_b = ३००

N = १०००

fm = ५००

i = २०

∴ मध्यांकाचे वर्गांतर =

$$\therefore \text{Mdn} = L + \left[\frac{\left(\frac{N}{2} - F_b \right)}{fm} \right] \times i$$

$$= ७९.५ + \left(\frac{५०० - ३००}{५००} \right) \times \frac{२०}{१}$$

$$= ७९.५ + \left(\frac{२००}{५००} \right) \times \frac{२०}{१}$$

$$\therefore \quad ७९.५ + \frac{२}{५} \times \frac{\cancel{२०}^{४}}{१}$$

= ७९.५ + ८

मध्यांक = ८७.५% होय.

(आ) मध्यांकाचा वापर केव्हा करावा?

(१) वारंवारिता विभाजनातील मध्यबिंदू हवा असेल तर.

(२) दोन्ही टोकाकडील काही प्राप्तांकाची माहिती नसेल तर.

(३) वारंवारिता विभाजन हे प्रसामान्य स्वरूपाचे नसेल तर.

(४) विद्यार्थ्यांचे मूल्यमापन श्रेणी स्वरूपात करण्यात आलेले असेल तर.

(५) ज्यावेळेला माहितीमध्ये त्रुटी असतील, गुणांकाचे स्थान माहीत आहे पण किंमत माहीत नाही अशी स्थिती असेल तर.

(६) जेव्हा शततमक, शततमक क्रम, चतुर्थक विचलन, इत्यादी पुढील मापने काढावयाची असतील तर.

(७) टोकाकडील प्राप्तांकाचा परिणाम न होणारे केंद्रीय प्रवृत्तीचे परिणाम हवे असेल तर.

संशोधनामध्ये प्रत्येक व्यक्तीच्या गुणांचा विचार होणे आवश्यक असते. मध्यांक काढताना गुणांकाच्या किंमतीचा विचार न करता फक्त स्थानाचा विचार होतो. म्हणून संशोधनात प्रामुख्याने मध्यमानाचा वापर केला जातो त्याबाबत आपण सविस्तर माहिती पाहू.

(३) मध्यमान Mean - (M)

आपण वर्तमानपत्रात वाचतो की, शहरात यावर्षी सरासरी पाऊस ६० सें.मी. पडला. महाराष्ट्राचे सरासरी अन्नधान्य उत्पादन इतके आहे. हे काढण्याची पद्धत तुमच्या परिचयाची आहे, हेच अंकगणिती सरासरी वा मध्यमान होय.

अंकगणिती मध्यमान काढण्याची पद्धत आपल्या सर्वांनाच माहीत आहे. यामध्ये दिलेल्या गटातील सर्व गुणांकांची बेरीज करून त्याला गटातील गुणांक संख्येने भागले असता मिळणाऱ्या गुणोत्तराला मध्यमान असे म्हणतात. येथे बेरीज, भागाकार ह्या गणिती क्रियांचा वापर केला जातो.

येथे

$$M = \frac{\Sigma X}{N}$$

M = मध्यमान   X = गटातील गुणांक

N = गटाचा आकार

उदाहरणार्थ, एका गटातील ९ विद्यार्थ्यांना अनुक्रमे ४, ३, ७, २, ५, १, ८ आणि ६ असे गुणांक प्राप्त झालेले आहेत तर त्यांचे मध्यमान किती येईल ?

$$\Sigma X = ४+३+७+२+५+१+८+६ = ३६$$

$$M = \frac{३६}{९} = ४$$

ही कृती इतकी सोपी आहे की, ती तुम्हांलाही सहजासहजी करता येईल.

सरावासाठी स्वाध्याय

पुढील गुणांकावलीचे मध्यमान काढा.

X = २२, ४०, ३०, ४७, २१, २८, १९, २५, ४७, ३१, २५, २५

> प्रत्येक वेळी मध्यमान पूर्णांकातच येईल असे मात्र नाही. उत्तर अपूर्णांकात येत असेल तर ते किमान दोन दशांश स्थळापर्यंत काढावे असा संख्याशास्त्रातील संकेत आहे.

मध्यमान ही महत्त्वपूर्ण केंद्रीय प्रवृत्ती आहे. कारण तो गटाचा गुरुत्वमध्य असतो. परंतु संशोधनामध्ये न्यादर्श मोठा असेल तर आकलन सुलभ व्हावे म्हणून आपण त्याचे वारंवारिता विभाजन कोष्टक तयार करतो. या सामूहिक माहितीत सुटे गुणांक नसल्यामुळे N ची किंमत माहिती असली तरी गुणांकाची

बेरीज मिळू शकत नाही. सामूहिक माहितीवरून मध्यमान काढण्याच्या वेगवेगळ्या पद्धती संख्याशास्त्रज्ञांनी तयार केलेल्या आहेत. आपण त्यापैकी फक्त एका महत्त्वपूर्ण पद्धतीची ओळख करून घेऊ या. या पद्धतीला स्वेच्छित मध्यमान (Arbitary Mean) / गृहित मध्यमान (Assumed Mean) पद्धती असे म्हणतात.

गुणांक समूहाची वाटणी छोट्या छोट्या गुणांकाकडून मोठ्यात मोठ्या गुणांकाकडे होत असताना साधारणपणे मध्यभागी सर्वाधिक गुणांक येतात याचा तुम्हांला अनुभव आलेला असेलच.

तुम्ही तुमच्या संशोधनामध्ये चाचणीचे गुण एकत्रित केलेले असतील. समजा ते गुणांक १० ते ९० पर्यंत असीतल तर १० ह्या गुणांकाच्या आणि ९० ह्या गुणांकाच्या आसपासचे गुणांक मिळविणाऱ्या विद्यार्थ्यांची संख्या खूप कमी असते. परंतु ५० गुणांकाच्या आसपास गुणांक मिळविणाऱ्यांची संख्या सर्वाधिक असल्याचे तुम्हाला आढळून आले असेलच.

वारंवारिता विभाजन कोष्टकावरून मध्यमान कसे काढावयाचे ते आता पाहू या !

एखाद्या गटाचे वारंवारिता विभाजन दिले असता ज्या वर्गांतरात सर्वात जास्त वारंवारिता येते त्या वर्गांतरात मध्यमान असण्याची शक्यता सर्वाधिक असते. म्हणून या वर्गांतराला मध्यमान वर्गांतर असे संबोधतात. वारंवारिता कोष्टकावरून कोणत्याही वर्गांतरात किती गुणांक आहेत, हे चटकन समजते पण प्रत्येक गुणांकाचे नेमके स्थान सांगता येत नाही.

उदाहरणार्थ, ४० ते ४९ या वर्गांतरात तीन वारंवारिता असतील तर तीनही गुणांक ४० किंवा ४९ सुद्धा असू शकतील किंवा ४० ते ४९ मधील कोणतेही तीन असू शकतील. सोयीसाठी असे गृहीत धरले जाते की त्या वर्गांतरातील सर्व वारंवारिता वर्गांतराच्या मध्यबिंदूपाशी केंद्रीत झालेल्या असतात. या बिंदूलाच वर्गांतर मध्य असे म्हणतात. प्रत्येक वर्गांतरातील वारंवारिता वर्गांतर मध्यातच एकवटलेली असते, हे गृहीत धरूनच पुढील संस्कार करावे लागतात.

$$\text{वर्गांतर मध्य} = \frac{\text{वर्गांतराची सुरुवात} + \text{वर्गांतराचा शेवट}}{२}$$

$$Xm = \frac{ll + ul}{२}$$

ll - lower limit
ul - upper limit

या पद्धतीने आपणांस सर्वाधिक वारंवारिता असणाऱ्या वर्गांतराचा वर्गांतर मध्य काढता येतो. या मध्य बिंदूलाच स्वेच्छित / गृहित / अंदाजे मध्यमान असे म्हणतात. ते AM ह्या संकेताने दाखवतात.

थोडक्यात स्वेच्छित मध्यमान म्हणजे गटामधील सर्वाधिक वारंवारिता असलेल्या वर्गांतराचा मध्य होय.

या बिंदूमुळे आपणांस मध्यमानाचे नेमके उत्तर मिळत नसले तरी मध्यमान किती असू शकेल याचा ढोबळ अंदाज येऊ शकतो आणि येणारे उत्तर त्याच्याशी पडताळून पाहता येते. अंतिम मध्यमानाची किंमतसुद्धा त्याच्या जवळपासचीच असते.

ही पद्धत आपण एका उदाहरणाने समजावून घेऊ या !

पुढे दिलेले वारंवारिता विभाजन कोष्टक क्र. ५ लक्षात घ्या.

वर्गांतर C.I	वारंवारिता f
० - ९	१
१० - १९	२
२० - २९	५
३० - ३९	१०
४० - ४९	*१५
५० - ५९	९
६० - ६९	५
७० - ७९	१
८० - ८९	१
९० - ९९	१
N = ५०	

कोष्टक ५ : वर्गांतरे आणि त्यातील वारंवारिता

ही उदाहरणे सोडविताना तुम्हांला ज्या ज्या टप्प्यातून जावे लागते ते पुढे दिलेले आहे.

(१) वारंवारितेच्या रकान्यात संख्यांची बेरीज करून N ची किंमत लिहा.
($N = \sum f$)

(२) वारंवारितेच्या स्तंभाचे निरीक्षण करून सर्वात जास्त वारंवारिता असलेले वर्गांतर निश्चित करा. ते लक्षात राहण्यासाठी त्यावर खूण करा किंवा ते दुरेघी करा.

(३) वरील कोष्टकात ४० ते ४९ च्या दरम्यानच्या वर्गांतरात १५ ह्या सर्वाधिक वारंवारिता आहे. म्हणून या वर्गांतरबाबतीत

वर्गांतर मध्य =

$$= \frac{३९.५+४९.५}{२} = \frac{८९.२०}{२} = ४४.५$$

या वर्गांतर मध्यालाच दिलेल्या या गटाचे स्वेच्छित वा गृहीत मध्यमान म्हणतात.

AM = ४४.५

(४) प्रत्येक वर्गांतराचे मध्यमान वर्गांतरापासूनचे विचलन लक्षात घेण्यासाठी ज्या वर्गांतरात गृहीत मध्यमान आहे त्या वर्गांतराचे विचलन शून्य आहे. या गृहीत मध्यमान असलेल्या वर्गांतरापेक्षा लहान वर्गांतरांना अनुक्रमे - १,-२,-३, ... अशी विचलने मांडावीत तर गृहीत मध्यमान असलेल्या वर्गांतरापेक्षा मोठ्या असलेल्या वर्गांतरांना क्रमवार +१, + २, + ३, ... अशी विचलने मांडावी लागतात. त्यांना d म्हणतात.

(५) विचलन मांडून झाल्यानंतर त्याच्यापुढील रकान्यात वारंवारिता आणि विचलन यांचा गुणाकार मांडावा. त्या सर्वांची बेरीज करून शेवटी Σfd ची किंमत मांडावी. या पद्धतीने तुमचे वारंवारिता विभाजन कोष्टक पुढीलप्रमाणे तयार होईल.

वर्गांतर	*वारंवारिता*	*वर्गांतर मध्य*	*विचलन*	*वारंवारिता X विचलन*	
C.I.	f	Xm	d	f X d	
०-९	१	४.५	- ४	-४	
१०-१९	२	१४.५	- ३	- ६	
२०-२९	५	२४.५	- २	- १०	- ३०
३०-३९	१०	३४.५	- १	- १०	
४०-४९	१५	४४.५	०	०	
५०-५९	९	५४.५	+ १	+ ९	
६०-६९	५	६४.५	+ २	+ १०	
७०-७९	१	७४.५	+ ३	+ ३	+ ३१
८०-८९	१	८४.५	+ ४	+ ४	
९०-९९	१	९४.५	+ ५	+ ५	

Σfd = +१

कोष्टक ६ : गृहीत मध्यमान काढण्यासाठीचे कोष्टक

N = ५० Σfd = +१

M = सत्य मध्यमान

AM = गृहीत मध्यमान = ४४.५

fd = वारंवारिता X विचलन = I

i = वर्गांतराची लांबी = १०

N = गटाचा आकार / = ५०

गटातील व्यक्तींची संख्या

सत्य मध्यमान काढण्यासाठी पुढील सूत्र वापरतात.

$$M = A.M. + \frac{\Sigma fd}{N} \times i$$

= ४४.५ + १/५० × १० = ४४.५ + ०.२

= ४४.७

हे लक्षात ठेवा

वारंवारिता विभाजन कोष्टकातील वर्गांतरे चढत्या / उतरत्या क्रमाने दिलेलीच असतात.

★ जर वर्गांतरे उतरत्या क्रमाने दिलेली असतील तर विचलनाचा + १ चा पाढा मध्यमान वर्गांतराच्या वरच्या अर्ध्यात येतो.

★ जर वर्गांतरे चढत्या क्रमाने दिलेली असतील तर विचलनाचा + १ चा पाढा खालच्या अर्ध्यात जाईल आणि विचलनाचा - १ चा पाढा वरच्या अर्ध्यात जाईल. वर्गांतराचा चढता / उतरता क्रम लक्षात घेऊन विचलनाची चिन्हे लिहावीत.

★ वारंवारिता आणि विचलन यांचा गुणाकार चिन्हांसहित मांडावा.

★ वारंवारिता नेहमी धन अर्थात अधिक असतात. त्यामुळे विचलनाचे (d) जे चिन्ह असेल तेच गुणाकाराचे चिन्ह येते, हे लक्षात ठेवावे.

★ विचलन आणि वारंवारितेच्या गुणाकाराची बेरीज करताना सर्व वजा आणि अधिक संख्यांची वेगवेगळी बेरीज करावी. मोठ्या संख्येतून लहान संख्या वजा करून येणाऱ्या उत्तरास मोठ्या संख्येचे चिन्ह द्यावे. म्हणजे Σfd ची बेरीज चुकणार नाही.

संख्याशास्त्रामध्ये विविध मापनांना संकेत चिन्ह वापरली जातात. ती वैश्विक नाहीत, किंबहुना त्या विषयापुरतेच आहेत. म्हणून सूत्रात वापरलेल्या सर्व संकेतांचे स्पष्टीकरण आकडेमोड करण्यापूर्वी लिहिणे गरजेचे असते.

उदाहरणार्थ, संख्याशास्त्रात M = मध्यमान तर भौतिकशास्त्रात M हा संकेत वस्तूमानासाठी वापरला जातो. पण Σ हे वैश्विक चिन्ह असल्यामुळे कुठेही वापरले तरी त्याचा अर्थ बेरीज असाच होतो.

संख्याशास्त्रात सूत्र लिहिले की, प्रथम संकेताचे स्पष्टीकरण द्यावे. त्याच्या किंमती लिहाव्यात. त्यानंतरच आकडेमोड करावी.

मध्यमानाचे उत्तर काढताना -

$$\frac{\Sigma fd}{N} \times i$$

हा स्वतंत्र घटक आहे. त्याची नेमकी किंमत काढल्याशिवाय गृहीत मध्यमानाच्या किंमतीशी त्याची सरमिसळ करावयाची नसते.

कारण या घटकाची किंमत +, - किंवा शून्यही येऊ शकते. त्या त्या चिन्हानुसार ती किंमत गृहीत मध्यमानात मिळवून किंवा वजा करून सत्य मध्यमानाचा शोध घ्यावा लागतो.

संशोधनामध्ये ज्यावेळी एकापेक्षा अधिक गट अभ्यासण्यासाठी घेतलेले असतात, त्यावेळी त्यांची परस्परांशी तुलना करण्यासाठी तसेच त्यांच्यापैकी वरचढ आणि हिणकस गट ठरविण्यासाठी मध्यमानाची तुलना उपयुक्त ठरू शकते.

मध्यमान हे गटाचे सर्वात स्थीर मापन असते आणि यानंतर गटासंबंधी विचलन, सहसंबंध, प्रमाणत्रुटी, इत्यादी पुढील मापने काढण्यासाठी सुरुवात मध्यमानांपासूनच करावी लागते.

सरावासाठी स्वाध्याय

योग्य जोड्या जुळवा.

(१)	मध्यांक	-	(क)	गणन पद्धतीने काढलेली केंद्रीय प्रवृत्ती
(२)	बहुलक	-	(ख)	आकडेमोडीने काढलेली केंद्रीय प्रवृत्ती
(३)	मध्यमान	-	(ग)	निरीक्षणाने काढलेली केंद्रीय प्रवृत्ती
			(घ)	विस्ताराने काढलेली केंद्रीय प्रवृत्ती

निवडणुकीचे निकाल कसे लागतील याबाबत एखाद्या शहरातील जनमत चाचणी घ्यावयाची आहे. त्यासाठी प्रथम संशोधकाला शहरात एकूण किती प्रकारचे लोक राहतात त्यांची अंदाजे संख्या किती आहे, ह्याचा विचार करावा लागतो. त्या सर्वांचा समावेश करून गटातील छोटा प्रातिनिधिक गट निवडावा लागतो. निवडणुकीबाबतचा अंदाज बांधण्यासाठी या गटांकडून मिळालेल्या माहितीचे विशिष्ट पद्धतीने एकत्रिकरण करावे लागते. त्याबाबतची माहिती पुढे दिलेली आहे.

(४) संयुक्त मध्यमान Combined Mean - (Mcomb)

बऱ्याच वेळा संशोधनासाठी लोकसंख्येतून अनेक गट न्यादर्श म्हणून निवडलेले असतात. बहुतांशी वैशिष्ट्ये ह्या गटांमध्ये एकसारखी आहेत असे दिसून येते. तरीही सर्व गटांची मध्यमाने तंतोतंत एकसारखी येत नाहीत. अशा वेळी त्या विशिष्ट लोकसंख्येचे मध्यमान सांगावयाचे असेल तर कोणत्या एका गटाचे मध्यमान सर्वांसाठी लागू पडणार नाही म्हणून तसेच लोकसंख्येतील विविध न्यादर्शाचा आकार तंतोतंत दुसऱ्या न्यादर्शासारखा असत नाही. अशा वेळी संपूर्ण लोकसंख्येसाठी जर सरासरी मध्यमान काढावयाचे असेल तर त्यासाठी संयुक्त मध्यमान काढावे लागते. त्याला M combined किंवा M comb असे म्हणतात.

(अ) संयुक्त मध्यमान काढण्याची पद्धत

(१) प्रत्येक न्यादर्शाच्या मध्यमानाला गटातील व्यक्तींच्या संख्येने गुणावे. (M X N).

(२) सर्व गुणाकारांची बेरीज करावी.

(३) या बेरजेला सर्व न्यादर्शातील एकूण व्यक्तीच्या संख्येने भाग द्यावा. समजा दोन न्यादर्श असतील तर M comb चे सूत्र होईल -

$$M\ comb = \frac{N_1 M_1 + M_2 N_2}{N_1 + N_2}$$

दोनापेक्षा जास्त गट असतील तर -

$$M\ comb = \frac{M_1N_1 + M_2N_2 + M_3N_3 + \text{----} M_nN_n}{N_1 + N_2 + N_3 + \text{----} N_n}$$

येथे $N_1 + N_2 + N_3$ हे न्यादर्श गटातील व्यक्तींच्या संख्या दर्शवितात तर $M_1 + M_2 + M_3$ हे त्या गटाची मध्यमाने दर्शवितात.

उदाहरणार्थ, एका संशोधकाने विज्ञानाचे अध्यापन करण्यासाठी बहुमाध्यम संच तयार केला व त्याची व्याख्यान पद्धतीने शिकणाऱ्या गटाशी सांगड घातली. त्या दोन्ही गटांचे सरासरी संपादन किती आहे ? हे पाहण्यासाठी त्याने वरील सूत्राचा पुढीलप्रमाणे वापर केला-

बहुमाध्यम संचाचा वापर करून केलेले अध्यापन

(M_1) मध्यमान = ६०

(N_1) विद्यार्थी संख्या = ४०

व्याख्यान पद्धतीचा वापर करून केलेले अध्यापन

(M_2) मध्यमान = ५०

(N_2) विद्यार्थी संख्या = ६०

$$M\ comb = \frac{६० \times ४० + ५० \times ६०}{४० + ६०} = \frac{५४००}{१००} = ५४$$

(∴ दोन्ही गटांची सरासरी संपादणूक '५४' आहे.)

तुम्ही ज्या वेळेला प्रायोगिक किंवा सर्वेक्षण संशोधनात अनेक गटावर चाचण्या घ्याल, प्रयोग कराल त्यावेळी व्यक्तींचे संपादन गटवार काढले जाईल पण आपणांस संपूर्ण जनसंख्येसाठी मापन हवे असेल तर मात्र संयुक्त मध्यमान काढावेच लागते.

(आ) मध्यमानाचा वापर केव्हा करावा ?

(१) केंद्रीय प्रवृत्तीचे सर्वात जास्त विश्वसनीय, वैध आणि स्थीर परिणाम हवे असतील तर.

(२) वारंवारिता विभाजन प्रसामान्य असेल तर (सर्वसामान्य लोकसंख्येचे मापन केलेले असेल तर).

(३) दिलेल्या गटाचा गुरुत्त्वमध्य हवा असेल तर.

(४) सहसंबंध गुणांक, प्रमाण विचलन, टी प्राप्तांक, एकमार्गी, द्विमार्गी प्रसरण विश्लेषण काढावयाचे असेल तर.

(५) प्रत्येक प्राप्तांकाचा केंद्रीय प्रवृत्तीवर होणारा प्रमाणशीर परिणाम दाखविणारी सरासरी काढावयाची असेल तर.

प्रत्येक केंद्रीय प्रवृत्तीच्या विविध मापनांची वैशिष्ट्ये पुढे थोडक्यात दिलेली आहेत.

मध्यमान आकडेमोडीने, मध्यांक गणन पद्धतीने आणि भूयिष्टक ही केवळ निरीक्षणाने काढली जाणारी केंद्रीय प्रवृत्ती आहे.

मध्यमान काढताना प्रत्येक गुणांकाचे मूल्य विचारात घेतले जाते म्हणून हे मापन अतिशय विश्वसनीय व सप्रमाणित असते तर मध्यांक काढताना बाकीच्या गुणांकाचा विचार न करता फक्त मधल्या स्थानी असणाऱ्या गुणांकालाच महत्त्व दिले जाते. गुणांकाचे विभाजन सरळ रेषेत नसल्यास मध्यांक ही विश्वसनीय सहजप्रवृत्ती ठरत नाही.

भूयिष्टकाच्या बाबतीत तो मध्यभागीच असेल याची खात्री नसते. कदाचित तो गटाच्या सुरुवातीचा किंवाशेवटचा गुणांकसुद्धा असू शकतो. म्हणून भूयिष्टकाला केंद्रीय प्रवृत्तीचे जुजबी मापन असे म्हणतात.

सरावासाठी स्वाध्याय

गाळलेल्या जागी योग्य पर्याय निवडून भरा.

(१) केंद्रीय प्रवृत्तीच्या ________ परिमाणामध्ये प्रत्येक गुणांक मूल्याचा विचार केला जातो.

(मध्यमान / मध्यांक / बहुलक)

(२) तात्काळ केंद्रीय प्रवृत्ती सांगावयाची असल्यास ______________ परिमाणाचा वापर कराल.

(मध्यमान / मध्यांक / बहुलक)

संशोधनामध्ये फक्त केंद्रीय प्रवृत्तीच्या साहाय्याने केलेल्या विश्लेषणावरून सांख्यिकी निष्कर्ष काढता येत नाहीत. हे आपण सुरुवातीला उदाहरणात पाहिले होते. या सांख्यिकीवर इतरही संस्कार करावे लागतात. ते आता पाहू या.

५.२ विचलनशीलता (Variability)

भारताचे सरासरी प्रतिकुटुंब उत्पादन हे त्याच्या दैनंदिन गरजा भागविण्याइतके आहे. परंतु प्रत्यक्षात आपल्याला असे दिसते की, काही कुटुंबे श्रीमंत आहेत तर काही कुटुंब दारिद्र्यरेषेखाली आहेत. सरासरीपासून हे विभाजन वेगवेगळे आहे त्यालाच संख्याशास्त्रात विचलन असे म्हणतात.

विचलन ही संकल्पना स्पष्ट होण्यासाठी आपण पुढील उदाहरण पाहू.

'अ' गटाची विद्यार्थी संख्या ५ आणि मध्यमान ५० आहे आणि 'ब' गटाची विद्यार्थी संख्या ५ आणि मध्यमान ५० आहे. ह्या माहितीवरून दोन गटांची तुम्हांला तुलना विचारली तर तुम्ही सांगाल, दोन्ही गट समान किंवा समतुल्य आहेत. परंतु दोन्ही गटांच्या गुणांकावलीवर दृष्टिक्षेप टाकला असता

** 'अ' गटातील गुणांक ४८, ४९, ५०, ५१, ५२ आहेत. या गटाचे मध्यमान ५० कमाल गुणांक ५२ आणि किमान गुणांक ४८ आहे. सर्व गुणांक मध्यमानापासून फारसे दूर गेलेले नाहीत म्हणून त्यांना समजातीय गट असे म्हणतात.*

** 'ब' गटाच्या गुणांकावलीवर नजर टाकली असता त्या गटातील गुणांक ३०, ४०, ५०, ६०, ७० असे आहे. या गटाचे मध्यमानही ५० आहे. परंतु गुणांक मध्यमानापासून दूरदूर अंतरावर विखुरलेले आहेत. ते बहुजिनसी / विजातीय / विषमजातीय आहे.* 'अ' गटामध्ये सर्व विद्यार्थ्यांचे संपादन जवळपास एकसारखे आहे. 'ब' गटामध्ये मात्र प्रत्येक विद्यार्थ्याचे संपादन दुसऱ्यापेक्षा पूर्ण वेगळे आहे. 'ब' गटामध्ये उत्तम, मध्यम आणि कनिष्ठ प्रतीचे विद्यार्थी आहेत. गटांच्या नुसत्या मध्यमानाची तुलना केली असता तर दोन्ही गट तंतोतंत एकसारखे आहेत, असे संपूर्ण चूक अनुमान आपण काढले असते. म्हणून निष्कर्ष काढण्यासाठी गटातील गुणांकाची विभागणी किती मर्यादेत, हे पाहण्यासाठी गुणांक विस्तार हे विचलनाचे सर्वात सोपे मापन उपयुक्त ठरते. कारण गुणांक विस्तार = गटातील कमाल गुणांक - किमान गुणांक गट गुणांकविस्तार Range - (R) काढणे तसे फार सोपे असते. पण सुरुवातीचा किंवा शेवटचा गुणांक बदलला आणि तो बाकीच्या गुणांकापासून खूप वेगळा असला तर त्याचा गुणांकविस्तारावर वाईट परिणाम होऊन चुकीचे निष्कर्ष काढले जातात. ९१, ९२, ९३, ९४, ९५ ह्याचा गुणांकविस्तार ९५-९१ = ४ इतका लहान आहे. त्यामुळे तो समजातीय गट आहे असे बरोबर सांगू पण तेच १, ९२, ९३, ९४, ९५ चा गुणांकविस्तार ९५-१ = ९४ असल्यामुळे हा अतिशय विषमजातीय गट आहे, असे आपण सांगितले तर चुकीचे निदान होईल का ? हे ओळखा बरे ! हीच गोष्ट गटातील गुणांक ९१, ९२, ९३, ९४, १९५ असेल तर घडेल काय ?

सरावासाठी स्वाध्याय

८१, ८२, ८३, ८४, १२५ ह्या गटाच्या गुणांकविस्तारावरून कोणता निष्कर्ष निघेल ?

केवळ केंद्रीय प्रवृत्तीचा आधार घेतला असता तर समजातीय गट बरोबर विषमजातीय गट असा निष्कर्ष काढून आपण चुकीचा अर्थ लावला असता म्हणून संख्याशास्त्रीय अर्थ लावण्यासाठी केंद्रीय प्रवृत्तीच्या जोडीला आपल्याला आणखी माहिती हवी असते. ही माहिती म्हणजे केंद्रीय प्रवृत्तीच्या दोन्ही बाजूला गुणांकांची वाटणी / विभाजन कसे झालेले आहे.

केंद्रीय प्रवृत्तीच्या भोवताली गुणांकाचे वाटप आपणांस ज्या मापनामुळे समजते त्या मापनास संख्याशास्त्रात विचलन (Variability) असे म्हणतात. केंद्रीय प्रवृत्तीच्या दोन्ही बाजूला गुणांक किती सरासरी अंतरावर आहेत हे शोधणे म्हणजेच गटाचे विचलन शोधणे होय आणि विचलन शोधण्याच्या चार पद्धती आहेत. त्यांनाच विचलनाची मापने असे म्हणतात. विचलनाची मापने (Measures) अशी :

(१) गुणांकविस्तार (Range)

(२) चतुर्थक विचलन (Quartile Deviation QD किंवा Q)

(३) सरासरी / मध्यमान विचलन

(Mean or Average Deviation → MD / AD)

(४) प्रमाणविचलन (Standard Deviation SD or σ)

विचलनाचे योग्य मापन करावयाचे असेल तर चतुर्थक विचलन, सरासरी वा मध्यमान विचलन, प्रमाण विचलन काढतात. ह्यापैकी चतुर्थक विचलन मध्यांक काढण्याच्या पद्धतीने तर मध्यमान विचलन व प्रमाणित विचलन मध्यमान शोधण्याच्या पद्धतीने काढले जाते. त्या दोघांचा मोठ्या प्रमाणावर वापर केला जातो. मध्यमान / सरासरी विचलन हे जरी मध्यमान काढण्याच्या पद्धतीनेच शोधले जात असले तरी त्याच्यापेक्षा प्रमाणविचलन अधिक विश्वसनीय व उपयुक्त ठरते. त्यामुळे त्याचाच प्रामुख्याने वापर करतात.

(१) गुणांकविस्तार (Range)

गुणांकविस्तार R ह्या संकेताने दाखवला जातो. R ची किंमत काढणे अगदी सोपे आहे, हे तुमच्या लक्षात आले असेलच. गटाचा गुणांकविस्तार = कमाल गुणांक - किमान गुणांक.

उदाहरणार्थ, संशोधकाला मिळालेल्या गुणांक पुढीलप्रमाणे आहेत. गुणाकांवलीचा विस्तार किती?

७, ८, १५, २०, १८, १७, १५, १८, ९, १०

सर्वात मोठा (कमाल) गुणांक = २०

सर्वात लहान (किमान) गुणांक = ०७

विस्तार = २० - ७ = १३

सरावासाठी स्वाध्याय

पुढील गुणांकावलीचा विस्तार काढा.

५०	७०	८०
६७	४५	४३
५७	६३	८९

आपण गुणांक तक्त्याचे जेव्हा वारंवारिता विभाजन कोष्टक तयार केले तेव्हा आपण सर्वप्रथम गुणांकविस्तारच काढला होता, हे तुम्हांला आठवत असेलच. वारंवारिता विभाजन कोष्टकावरूनही गुणांकविस्तार काढणे फार सोपे असते. ज्यात वारंवारिता आहे अशा सर्वात मोठ्या (शेवटच्या) वर्गांतराच्या उच्चतम गुणांकातून सर्वात लहान (सुरुवातीच्या) पण वारंवारिता असलेल्या वर्गांतराचा निचतम गुणांक वजा केला की, आपणांस सामूहिक माहितीचा गुणांकविस्तार मिळतो.

(२) चतुर्थक विचलन (Quartile Deviation QD & Q)

दिलेले गुणांक चढत्या किंवा उतरत्या क्रमाने मांडल्यानंतर त्या गुणांकावलीचे ४ समान भाग करतात. प्रत्येक भागाला चतुर्थक म्हणतात. प्रत्येक चतुर्थकात २५% गुणांक असतात. सुरुवातीचे २५% गुणांक जेथे संपतात त्या गुणांकाला Q_1 म्हणतात तर सुरुवातीचे ५०% गुणांक जेथे संपतात त्याला Q_2 म्हणतात.

Q_2 हा गुणांक म्हणजेच केंद्रीय प्रवृत्ती काढताना आपण शोधलेला मध्यांक हे तुमच्या सहज लक्षात आले असेलच !

सुरुवातीचे ७५% गुणांक जेथे संपतात त्याला Q_3 म्हणतात. मग सर्व गुणांक जेथे संपतात त्याला Q_4 का म्हणायचे हे तुमच्या लक्षात आले असेलच. एकदा का Q_3 व Q_1 च्या किंमती निश्चित केल्या की, मग चतुर्थक विचलन काढणे फार सोपे असते.

$$Q = \frac{Q_3 - Q_1}{2}$$

(तिसऱ्या आणि पहिल्या चतुर्थकामध्ये जो विस्तार असतो त्याच्या निम्म्याइतकी ही किंमत असते. म्हणून ह्याला अर्धचतुर्थकांतर विस्तार [semi - interquartile Range] असेही म्हणतात).

एक सोपे उदाहरण लक्षात घेऊन आपण चतुर्थक विचलन काढायला शिकू या !

गुणांकावली :

X = २२, १९, २५, २८, २०, ३२, ३६, २५, ४०, ४२, ४५, २५

चढत्या क्रमाने मांडलेले गुणांक :

X = १९, २०, २२, २५, २५, २५, २८, ३२, ३६, ४०, ४२, ४५

ह्या गटात १२ गुणांक आहे म्हणून प्रत्येक चतुर्थकात १२/४ = ३ गुणांक येतील. Q_1 म्हणजे पहिले ३ गुणांक २२ येथे संपले तो Q_1 तर पहिले ९ गुणांक जेथे संपले तो ३६ हा गुणांक म्हणजे Q_3 (Q_4 ची किंमत ४५ असेल का ? ह्याचे उत्तर तुम्ही सहज देऊ शकाल.)

त्यामुळे -

$$Q = \frac{Q_3 - Q_1}{२} = \frac{३६-२२}{२} = \frac{१४}{२} = ७$$

ही आकडेमोड सहज करता येते.

ज्या गुणांकावलीमध्ये ४ ने पूर्ण भाग न जाणारी गुणांक संख्या असते तेथे मध्यांक काढताना तुम्ही सरासरी काढण्याचे जे तंत्र वापरले त्याचाच वापर करा. म्हणजे जर १० गुणांक असतील Q_1 काढताना २.५ क्रमांकाचा गुणांक काढताना दुसऱ्या व तिसऱ्या क्रमांकाच्या गुणांकाची सरासरी काढा. Q_3 ची किंमत काढताना सातव्या आणि आठव्या क्रमांकाच्या गुणांकाची सरासरी तुम्ही बिनचूक काढू शकाल. त्यानंतर Q ची किंमत काढणे सहज जमू शकेल.

वारंवारिता विभाजन कोष्टकाच्या स्वरूपात माहिती असल्यास त्यावरूनही चतुर्थक विचलन काढता येते. त्यावरून मोठ्या गटाविषयी निष्कर्ष काढता येतात.

चतुर्थक विचलन काढण्यासाठी मध्यांक काढण्याचीच पद्धत वापरावी लागते. फक्त ५०% (N/2) गुणांक संपतात तो गुणांक न शोधता जेथे २५% (N/4) आणि ७५% (3N/4) गुणांक संपतात ते गुणांक शोधावे लागतात. वारंवारिता विभाजन कोष्टकात वर्गांतरे चढत्या किंवा उतरत्या क्रमाने मांडलेली असल्यामुळे संचित वारंवारिता काढणे सोपे जाते. N/4 व ३N/4 च्या संख्या काढल्या की, मग कोष्टकामध्ये त्या संख्या (संचित वारंवारिता) असलेली वर्गांतरे शोधणे अतिशय सोपे असते आणि सूत्राचा बिनचूक वापर केला की, Q_1 व Q_3 च्या किंमती मिळतात. (फक्त आकडेमोड करताना सावधपणे आणि बिनचूक करायचे एवढे विसरू नका.)

वर्गांतरे C.I.	*वारंवारिता* *f*	*संचित वारंवारिता* C.F.
०-९	३ ⟶	३
१०-१९	५ ⟶	८
२०-२९	१८ ⟶	२६
३०-३९	११ ⟶	३७
४०-४९	७ ⟶	४४
५०-५९	४ ⟶	४८

कोष्टक ७ : वर्गांतरे आणि वारंवारिता

N = ४८

$$\frac{N}{४} = \frac{४८}{४} = १२ \text{ वारंवारिता}$$

$$\frac{३N}{४} = \frac{३ \times ४८}{४} = ३६ \text{ वारंवारिता}$$

त्यामुळे Q_1 शोधताना जेथे सुरुवातीच्या १२ संचित वारंवारिता संपल्या तो गुणांक (२०-२९ ह्या वर्गांतरातील) आणि ३६ संचित वारंवारिता संपल्या तो गुणांक (३०-३९ ह्या वर्गांतरातील) शोधावा लागेल.

$$Q_1 = L_1 + \left[\frac{\frac{N}{४} - F_b}{fm_1} \right] \times i$$

L_1 = १९.५
F_b = ८
fm_1 = १८
i = १०

$$Q_1 = १९.५ + \frac{१२ - ८}{१८} \times \frac{१०}{१}$$

$$Q_1 = १९.५ + \frac{४}{१८} \times \frac{१०}{१}$$

$$Q_1 = १९.५ + \frac{२०}{९}$$

$$= १९.५ + २.२२ = २१.७२$$

(जेथे L_1 = Q_1 असलेल्या वर्गांतराची सुरुवात
N = गटातील व्यक्तींची गुणांकाची संख्या
F_b = त्या वर्गांतरापूर्वीची संचित वारंवारिता
fm_1 = Q_1 असलेल्या वर्गांतराची वारंवारिता
i = वर्गांतराची लांबी)

(येथे दोन गोष्टी लक्षात घ्या. सूत्रातील अपूर्णांकाची किंमत शोधल्याशिवाय L_1 मध्ये मिळवू नका आणि अपूर्णांकाचे उत्तर किमान दोन दशांश स्थळापर्यंत बरोबर शोधा.)

(ह्या सूत्राचे स्पष्टीकरण बिनचूक मांडू शकाल.)

$$Q_3 = L_3 + \frac{\frac{३N}{४} - F_b}{fm_3} \times i$$

L_3 = २९.५
F_b = २६
fm_3 = ११
i = १०

$$Q_3 = २९.५ + \left[\frac{३६ - २६}{११} \times \frac{१०}{१} \right]$$

$$Q_3 = २९.५ + \frac{१०}{११} \times \frac{१०}{१}$$

$$Q_3 = २९.५ + \frac{१००}{११} = २९.५ + ९.०९ = ३८.५९$$

आता आपल्याला चतुर्थक विचलन (Q) ची किंमत काढायची.

$$Q = \frac{Q_3 - Q_1}{२} = \frac{३८.५९ - २१.७२}{२}$$

$$= \frac{१६.८७}{२} = ८.४३ \text{ किंवा } ८.४४$$

∴ या गटाचे चतुर्थक विचलन ८.४४ आहे.

सरावासाठी स्वाध्याय

पुढील कोष्टकात दिलेल्या माहितीचे चतुर्थक विचलन काढा.

वर्गांतरे	०-९	१०-१९	२०-२९	३०-३९	४०-४९	५०-५९	६०-६९	७०-७९	८०-८९
वारंवारिता	०	२	५	०	९	१२	६	०	३

(३) प्रमाणविचलन (Standard Deviation)

संख्याशास्त्रामध्ये प्रमाणविचलनाचाच उपयोग अतिशय विश्वसनीय व उपयुक्त मापन म्हणून मोठ्या प्रमाणावर केला जातो. ह्यामध्ये प्रथम मध्यमान काढून मग प्रत्येक गुणांकाचे मध्यमानापासून विचलन काढले जाते. ही विचलने, मध्यमानापेक्षा गुणांक मोठा असल्यास (+) धन तर मध्यमानापेक्षा गुणांक लहान असल्यास (-) ऋण येतात. त्यांची नुसती बेरीज केली तर काही फायदा होत नाही म्हणून ह्या विचलनांचा वर्ग करतात. (संख्या धन किंवा ऋण असली तर तिचा वर्ग नेहमी + (धन) येतो. त्यामुळे पुढील संस्कार करण्यासाठी विचलन वर्गाची बेरीज पुरेशी असते.) ह्यासाठी एक उदाहरण पाहू.

गुणांकावली (X) = ५, ४, ३, ९, ८, ७, २, १, ६

ह्या गटाचे मध्यमान (M) = $\frac{४५}{९}$ = ५

मध्यमानापासून प्रत्येक गुणांकाचे विचलन = d = X – M

०, -१, -२, +४, +३, +२, ३, ४, १

d^2 = ०, १, ४, १६, ९, ४, ९, १६, १

विचलन वर्गाची बेरीज ($\sum d^2$) = ६०

∴ SD अर्थात σ =

$$\sqrt{\frac{\sum d^2}{N}} = \sqrt{\frac{६०}{९}} = \sqrt{६.६७} = २.५८$$

(घातांक कोष्टक किंवा अंकगणितातील पेटा पद्धतीने वर्गमूळ काढण्याचा सराव करा.)

सरावासाठी स्वाध्याय

पुढील गुणांकावलीचे प्रमाण विचलन काढा.

५, १५ १८, १७, १४, १३, १९, २०

प्रमाण विचलन म्हणजे विचलन वर्गाच्या सरासरीचे वर्गमूळ किंवा सरासरी विचलन वर्गाचे वर्गमूळ होय.

प्रमाण विचलनाचा सर्वात मोठा उपयोग होतो तो मोठ्या समूहांच्या बाबतीत त्यामुळे वारंवारिता विभाजन कोष्टकावरून प्रमाण विचलन काढणे अतिशय महत्त्वाचे असते. तुम्हांला मध्यमान काढण्याच्या पद्धतीचा सराव झालेला आहे. तिचाच उपयोग आपण ह्यासाठी करणार आहोत. ते एका उदाहरणाने समजावून घेऊ.

वर्गांतरे C.I.	*वारंवारिता* f	*विचलन* d	$f \times$ d	fd^2
०-९	३	- २	- ६	१२
१०-१९	५	- १	- ५	५
२०-२९	१८	०	०	०
३०-३९	११	+ १	+ ११	११
४०-४९	७	+ २	+ १४	२८
५०-५९	४	+ ३	+ १२	३६
	N = ४८		$\sum f$d = २६	$\sum f$d^2 = ९२

कोष्टक ८ : प्रमाण विचलनासाठीची सामग्री

N = ४८

$\sum f$d = + २६ $\sum f$d^2 = ९२

$$\therefore \text{SD किंवा } \sigma = i\sqrt{\frac{\sum f d^2}{N} - \frac{(\sum f d)^2}{N}}$$

$$\therefore \quad \text{SD किंवा } \sigma = i \times \sqrt{\left[\frac{\sum f d^2}{N} - \frac{\sum (f d)^2}{N}\right]}$$

$$\therefore \sigma = 10 \times \sqrt{\left[\frac{९२}{४८} - \frac{(२६)^२}{४८}\right]}$$

$$\therefore \sigma = १० \times \sqrt{१.९२ - (.५४)^२}$$

$$\therefore \sigma = १० \times \sqrt{१.९२ - ०.२९}$$

$$\therefore \sigma = १० \times \sqrt{१.६३} = १० \times १.२८ = १२.८$$

जेथे σ = प्रमाण विचलन

i = वर्गांतराची लांबी

f = वारंवारिता

d = विचलन

N = गटातील गुणांक संख्या

मध्यमानाच्या उदाहरणाचे निरीक्षण करा. प्रमाणविचलन काढताना त्यात थोडा बदल केला जातो. फक्त एक उभा रकाना जादा जोडला जातो. d आणि fd ह्या मागील दोन रकान्यांचा गुणाकार $fd^२$ केल्यामुळे सगळे गुणाकार + (धन) झाले आहेत. शेवटी फक्त $\sum fd^२$ म्हणून त्याची सरळ बेरीज करावयाची आहे आणि सूत्रामध्ये टाकून किंमत काढावयाची आहे. हे सूत्र जॉन स्पिअरमन ह्या सुप्रसिद्ध संख्याशास्त्रज्ञाने तयार केले आहे.

वर्गमूळात असलेल्या संख्येमध्ये $\frac{(\sum fd)^२}{N}$ हा

जो भाग आहे त्याला स्पिअरमनची दुरुस्ती म्हणतात. येथे वर्ग असल्यामुळे तिचे उत्तर नेहमी + (धन) येते आणि त्या कंसापूर्वी - (वजा) चिन्ह असल्यामुळे स्पिअरमनची दुरुस्ती नेहमी वजा करायची असते. कधीही मिळवायची (बेरीज करायची) नसते हे सूत्र नेहमी लक्षात ठेवा.

ह्यापूर्वी ह्याच उदाहरणाचे आपण चतुर्थक विचलन ८.४३ काढले होते. दोन्ही उत्तरांची जुज़बी तुलना केली तर प्रमाण विचलन चतुर्थक विचलनाच्या साधारणपणे दीडपट असते. ही गोष्ट तुमच्या लक्षात येईल. आपण जी उदाहरणे सोडवतो त्याची उत्तरे बरोबर आहे ना ? हे पडताळून पाहण्यासाठी खूपच उपयोगी असा हा संख्याशास्त्रीय निकष आहे.

सरावासाठी स्वाध्याय

खालील वारंवारिता विभाजन कोष्टकावरून मध्यमान आणि प्रमाण विचलन काढा.

वर्गांतर	*वारंवारिता*
६५-७९	२
६०-६४	३
५५-५९	७
५०-५४	८
४५-४९	५
४०-४४	२
३५-३९	३
	N = ३०

सरावासाठी स्वाध्याय

गाळलेल्या जागी योग्य पर्याय निवडा.

(१) चतुर्थक विचलन ________________ शोधण्याच्या पद्धतीने काढले जाते.
(बहुलक / मध्यांक /मध्यमान)

(२) मध्यमानाचा वापर ________________ शोधण्यासाठी केला जातो.
(विस्तार / चतुर्थक विचलन / प्रमाण विचलन)

न्यादर्शाकडून जनसंख्येकडे एकाच जनसंख्येतून जेव्हा अनेक न्यादर्श निवडले जातात आणि त्याची मध्यमान, प्रमाणविचलन ह्यासारखी संख्याशास्त्रीय मापने शोधली जातात तेव्हा सर्व न्यादर्शाच्या बाबतीत ही मापने तंतोतंत एकसारखी येत नाहीत, हे आपण पाहिले आहेच तसेच प्रत्येक न्यादर्शातील व्यक्ती संख्या तंतोतंत दुसऱ्या न्यादर्शातील व्यक्ती संख्येएवढी प्रत्येक वेळा असेलच असेही सांगता येत नाही. पण आपणांस त्या जनसंख्येसाठी संख्याशास्त्रीय मापने माहीत असणे आवश्यक असते. अशा वेळी निरनिराळ्या न्यादर्शाच्या मध्यमानावरून त्यासाठी संयुक्त मध्यमान कसे काढायचे? हे आपण केंद्रीय प्रवृत्तीच्या भागात तर पाहिले. आता तोच विचार पुढे नेऊन संयुक्त प्रमाण विचलन कसे काढावे? हे समजावून घेऊ.

(४) **संयुक्त प्रमाणविचलन** (Combined S.D. or σcomb)

अनेक न्यादर्शांच्या मध्यमानावरून आपण संपूर्ण जनसंख्या प्रकारासाठी संयुक्त मध्यमान MComb काढण्यासाठी -

$$\text{Mcomb} = \frac{M_1N_1+M_2N_2+M_3N_3+----}{N_1+N_2+N_3+----}$$

हे सूत्र वापरले आणि आलेले संयुक्त मध्यमान प्रत्येक न्यादर्श मध्यमानापेक्षा वेगळे असते हेही पाहिले. संयुक्त मध्यमान आणि न्यादर्शाच्या मध्यमानातील फरक संख्याशास्त्रात d ह्या अक्षराने दाखवला जातो. ह्यावरून $d_1 = M_1$ - Mcomb, $d_2 = M_2$- Mcomb, $d_3 = M_3$ - Mcomb, असे असावे. हे तुमच्या सहज लक्षात आले असेल. अशा प्रकारे d_1, d_2, d_3 ह्याच्या किंमती शोधल्या की पुढील सूत्राने संयुक्त प्रमाण विचलन काढतात.

$$\sigma\text{comb} = \sqrt{\frac{N_1(\sigma_1^2+d_1^2)+N_2(\sigma_2^2+d_2^2)+N_3(\sigma_3^2+d_3^2)}{N_1+N_2+N_3+----}}$$

येथे σ_1, σ_2, σ_3, ------- ही त्या त्या न्यादर्शाची प्रमाण विचलने आहेत तर $N_1 + N_2 + N_3$ + ---- ही त्या त्या न्यादर्शातील व्यक्तींची संख्या आहे.

एका साध्या उदाहरणावरून आपण संयुक्त प्रमाण विचलन शोधून काढू.

उदाहरणार्थ, अ आणि ब हे दोन शिशुविहार आहेत. त्यांना खेळाच्या संदर्भात एक चाचणी दिली तेव्हा दोन्ही गटाविषयी आलेली माहिती अशी - अ गटामध्ये २५ मुले असून त्यांचे मध्यमान ८० आणि प्रमाण विचलन १५ आहे तर ब गटात ७५ मुले असून त्यांचे मध्यमान ७० व प्रमाण विचलन २५ आहे तर शिशुसाठी संयुक्त प्रमाण विचलन किती ?

येथे N_1 = २५, M_1 = ८०, σ_1, = १५

N_2 = ७५, M_2 = ७०, σ_2, = २५

$$\therefore \text{M comb} = \frac{M_1N_1 + M_2N_2}{N_1 + N_1}$$

$$= \frac{२५ \times ८० + ७० \times ७५}{२५ + ७५}$$

$$= \frac{२००० + ५२५०}{१००} = \frac{७२५०}{१००} = ७२.५०$$

म्हणून d_1 = ८० - ७२.५० = ७.५० तर

d_2 = ७० - ७२.५० = - २.५०

$$\therefore \sigma \text{ comb} = \sqrt{\frac{२५[(१५)^२+(७.५०)^२]+७५[(२५)^२+(-२.५०)^२]}{२५ + ७५}}$$

$$\therefore \sigma \text{ comb} = \sqrt{\frac{२५[२२५ + ५६.२५] +७५ [६२५ +६.२५]}{२५ + ७५}}$$

$$\therefore \sigma \text{ comb} = \sqrt{\frac{२५ \times २८१.२५ + ७५ \times ६३१.२५}{१००}}$$

$$\therefore \sigma \text{ comb} = \sqrt{\frac{७०३१.२५ + ४७३४३.७५}{१००}}$$

$$\therefore \sigma \text{ comb} = \sqrt{\frac{५४३७५.००}{१००}}$$

$$\therefore \sigma \text{ comb} = \sqrt{५४३.७०}$$

$$\therefore \sigma \text{ comb} = २३.३२$$

ह्या ठिकाणी d च्या किंमती काढण्याइतकेच त्यांचे वर्ग अचूक मांडणे. दोन दशांश स्थळापर्यंत उत्तर अचूक मांडणे. व्यवस्थित गुणाकार आणि बेरजा करणे आणि शेवटी अचूक वर्गमूळ काढणे ह्या गोष्टी महत्त्वाच्या आहेत.

> सुरुवातीला थोडे कठीण वाटेल पण सराव केला की, जमू लागेल व गोडी वाढेल. वर्ग, गुणाकार, बेरीज, वजाबाकी, भागाकार करण्यासाठी कॅलक्युलेटरची मदत घेण्यास हरकत नाही.

सरावासाठी स्वाध्याय

एका संशोधकाला किशोरवयीन मुलांच्या बुद्धिमत्तेचे मापन करावयाचे होते. त्याने एका शाळेतील एका इयत्तेतील तीन तुकड्यांना बुद्धिमापन चाचणी दिली तेव्हा त्याला मिळालेली माहिती अशी -

तुकडी अ -	विद्यार्थी संख्या	-	६०
	मध्यमान	-	१२०
	प्रमाण विचलन	-	२०
तुकडी ब -	विद्यार्थी संख्या	-	५०
	मध्यमान	-	१२६
	प्रमाण विचलन	-	२२
तुकडी क -	विद्यार्थी संख्या	-	४०
	मध्यमान	-	१३०
	प्रमाण विचलन	-	२५

तर किशोरवयीन मुलांचा सरासरी बुद्ध्यांक किती? व त्यांच्यातील संयुक्त प्रमाणविचलन किती?

(५) विचलन सहगुणक (Co-efficient of Variation - V)

आपण एकाच गटाचे अनेक गुणविशेषासाठी मापन करतो. (जसे वजन, उंची, बुद्धिमत्ता इत्यादी) पण हे मापन करताना त्याची परिमाणे भिन्नभिन्न असतात. (जसे वजन कि.ग्रॅ.मध्ये, उंची सें.मी.मध्ये तर बुद्धिमत्ता गुणांकामध्ये मोजली जाते.) त्यामुळे केंद्रीय प्रवृत्ती, प्रमाणित विचलन ही मापनेसुद्धा त्याच परिमाणात येतात. परंतु परिमाणे वेगवेगळी असल्यामुळे कोणत्या गुणविशेषात विचलन जास्त आहे ? कोणत्यात कमी आहे ? ह्याची तुलना मापनावरून करताच येत नाही. **मापनाचे परिमाण समान असले तर तुलना शक्य होते किंवा मापनाला परिमाणच नसेल तर तुलना करता येते.** तसेच एकाच गुणविशेषाच्या बाबतीत दोन भिन्न गटांची विचलनाच्या बाबतीत तुलना करावयाची असेल तरी दोघांची मध्यमाने सारखी असल्याशिवाय सरळ तुलना करता येत नाही. मध्यमाने वेगवेगळी येतात. तशीच प्रमाण विचलनेही वेगवेगळी असतात.

> ज्याप्रमाणे विज्ञानात पदार्थांची परस्परांशी जडपणाची तुलना करतात त्यावेळी पदार्थांच्या घनतांची तुलना करीत नाहीत तर प्रत्येक पदार्थाच्या घनतेची पाण्याच्या प्रमाणित घनतेशी तुलना करून त्या पदार्थांचे सापेक्ष जडत्व अर्थात विशिष्ट गुरुत्व प्रथम काढले जाते. तुलना करताना घनतेची परिमाणे एकमेकांना छेद देतात. त्यामुळे सापेक्ष जडत्व तो पदार्थ पाण्याच्या कितीपट जड आहे हे आपल्याला सांगतो. त्यामुळे दोन वेगळ्या पदार्थांच्या सापेक्ष जडत्वाची सहज तुलना करता येते आणि कोणता पदार्थ जड आणि कोणता हलका हे नि:र्विवादपणे सांगता येते.

हीच कल्पना वापरून मध्यमान आणि प्रमाण विचलन काढले की त्या गटाचे विचलन ठरविण्यासाठी विचलन सहगुणक (V) काढतात तो एका सोप्या सूत्राने काढतात.

सूत्र असे -

$$V = \frac{१०० \sigma}{M}$$

येथे प्रत्येक गुणवैशिष्ट्यांची येथे σ व M ची मापने एकाच परिमाणात असतात. त्यामुळे ती परस्परांना छेद देतात आणि V चे उत्तर नुसते गुणकांत मिळते. त्यामुळे एक गटाच्या दोन गुणविशेषामधील V च्या किंमतीची तुलना करता येते. तसेच एकाच गुणविशेषाच्या बाबतीत २ गटांची विचलन स्वरुपाविषयी सहज तुलना करता येते. त्यासाठी एक उदाहरण पाहू -

७ वर्षे वयाच्या तिसरीच्या वर्गातील मुलांची सरासरी उंची ९० सें.मी. आहे, प्रमाण विचलन १० सें.मी. आहे आणि ह्याच मुलांचे सरासरी वजन २० कि.ग्रॅ. असून वजनाचे प्रमाण विचलन २ कि.ग्रॅ. आहे मग वजन आणि उंची ह्यापैकी कोणत्या गुणविशेषात गटाचे विचलन जास्त आहे ?

$$V\ (\text{उंचीसाठी}) = \frac{१०० \sigma}{M}$$

$$= \frac{१०० \times ९० \text{ सें.मी.}}{९० \text{ सें.मी.}} = \frac{१०००}{९०} = ११.१$$

$$V\ (\text{वजनासाठी}) = \frac{१०० \sigma}{M}$$

$$= \frac{१०० \times २ \text{ कि.ग्रॅ.}}{२० \text{ कि.ग्रॅ.}} = १०$$

ह्यावरून वजनाच्या विचलन सहगुणकत्व V पेक्षा उंचीच्या विचलन सहगुणकाची किंमत जास्त आहे. म्हणून वजनापेक्षा उंचीच्याबाबतीत ह्या गटामध्ये अधिक विचलन आढळून येते.

दुसऱ्या उदाहरणात मुलांचे सरासरी वजन २० कि.ग्रॅ. असून त्यांचे प्रमाण विचलन २ कि.ग्रॅ. आहे तर प्रौढांचे सरासरी वजन ५० कि.ग्रॅ. असून त्यांचे प्रमाण विचलन ४ कि.ग्रॅ. आहे तर मुले आणि प्रौढ व्यक्ती ह्यांच्याबाबतीत वजनातील विचलन कुणाचे जास्त आहे ?

$$V\ (\text{मुलांसाठी}) = \frac{१०० \sigma}{M}$$

$$= \frac{१०० \times २ \text{ कि.ग्रॅ.}}{२० \text{ कि.ग्रॅ.}} = १०$$

$$V\ (\text{प्रौढांसाठी}) = \frac{१०० \sigma}{M}$$

$$= \frac{१०० \times ४ \text{ कि.ग्रॅ.}}{५० \text{ कि.ग्रॅ.}} = ८$$

ह्यावरून प्रौढापेक्षा मुलांचा गट हा वजनाच्या बाबतीत जास्त विचलन असलेला आहे ही गोष्ट आपल्या सहज लक्षात येते.

सरावासाठी स्वाध्याय

(१) मुलींच्या बुद्धिगुणांकाची सरासरी ११० आहे आणि ह्या गटाचे प्रमाण विचलन २५ आहे. मुलांच्या गटाच्या बुद्धिगुणांकाची सरासरी १०० असून, प्रमाण विचलन २४ आहे तर बुद्धीच्या बाबतीत मुलामुलींची तुलना केली तर कोणाच्या बुद्धिमत्तेमध्ये जास्त विचलन आढळून येते.

(२) १० वी च्या विद्यार्थ्यांच्या कपाळाच्या उंचीची सरासरी १९० मि.मी. असून कपाळाच्या उंचीचे प्रमाण विचलन ६ मि.मी. आहे. ह्याच मुलांची वजने मोजली तेव्हा त्याची सरासरी ६० कि.ग्रॅ. आणि वजनासाठीचे प्रमाण विचलन ७ कि.ग्रॅ. भरले तर वजन आणि कपाळाची उंची ह्यांपैकी कोणत्या गुणविशेषाबाबत मुलांच्या गटात कमी विचलन आढळून आले ?

ज्याप्रमाणे सांख्यिकी तंत्राचा वापर करून गटाची केंद्रीय प्रवृत्ती, विचलनशीलता काढली जाते त्याचप्रमाणे मिळालेल्या आधारसामग्रीचे आलेखात रूपांतर करूनसुद्धा निष्कर्ष काढले जातात. अनेक वेळा तर प्रथम आलेख काढतात आणि मग सांख्यिकीसाठी आकडेमोड सुरू करतात. या आलेखांबाबतची माहिती व त्यांची उपयुक्तता पुढे दिलेली आहे.

६.० आलेख आणि त्यांचे प्रकार

सुट्या स्वरूपातील माहितीवरून अनुमान प्राप्त करण्यासाठी तिच्यावर जो पहिला संस्कार केला जातो. तो म्हणजे वारंवारिता विभाजन कोष्टक तयार करणे हा होय. त्यावरून एका दृष्टिक्षेपात गटाची माहिती हवी असेल तेव्हा उदाहरणार्थ, कोणत्या वर्गांतरात किती वारंवारिता ? सर्वात जास्त तथा समान वारंवारितेची वर्गांतरे कोणती ? हे पाहण्यासाठी आलेख काढला जातो. आलेख म्हणजे वितरणाचे क्षणचित्र (Snap shot) असते. त्यामुळे प्रत्यक्ष गुणदान न पाहताही वितरणासंबंधी सर्व गोष्टी एकाच दृष्टिक्षेपात समजतात. आलेखामुळे संशोधकाला मिळालेल्या माहितीचे, वितरण स्पष्ट करून सांगणे खूपच सोपे जाते.

६.१ आलेखाबाबतची सर्वसाधारण माहिती

★ आलेखाला क्ष आणि य असे दोन अक्ष असतात. क्ष अक्ष हा भूपृष्ठाला समांतर असतो तर य अक्ष भूपृष्ठाशी काटकोन करून काढला जातो.

★ क्ष अक्षावर गटाचा विस्तार दाखविणारी वर्गांतरे असतात.

★ य अक्षावर प्रत्येक वर्गांतरातील वारंवारिता दर्शविल्या जातात.

★ क्ष आणि य अक्ष ज्या बिंदूत एकमेकांना छेदतात त्या बिंदूला आरंभबिंदू (Origin) असे म्हणतात.

★ क्ष आणि य अक्ष पूर्ण काढून आलेखाचे चार भाग करता येतात पण साधारणपणे उजवीकडील $\frac{१}{४}$ भाग हाच आलेख काढण्यासाठी प्राधान्याने वापरला जातो.

★ आरंभबिंदूवर क्ष आणि य अक्षाची सुरुवात घेतली जाते म्हणून या बिंदूचे सहगुणक (०, ०) असे लिहिले जातात. अर्थात ते तसेच घेतले पाहिजे असे बंधन मात्र नसते.

आलेखाच्या आणि विविध प्रकारांपैकी आपण आयतालेख आणि वारंवारिता बहुभुजच्या दोन आलेखांबाबत सविस्तर माहिती पाहू.

६.२ आलेखाचे प्रकार

आलेखांचे विविध प्रकार आहेत. ते असे -

(अ) चित्रालेख (Pictogram)

(आ) वारंवारिता बहुभुज (Frequency Polygon)

(इ) स्तंभालेख (आयतालेख) (Histogram / Column Diagram)

(ई) रेषालेख (Line Diagram) / (Line Graph)

(उ) बार चार्ट (Bar Chart)

(ऊ) वर्तुळालेख (Pie Diagram)

असे असले तरी संख्याशास्त्रामध्ये स्तंभालेख आणि वारंवारिता बहुभुज हे आलेख अधिक शास्त्रशुद्ध असल्याने, प्राधान्याने वापरले जातात. कधी कधी जनसंख्येची गटामध्ये झालेली विभागणी दाखविण्यासाठी वर्तुळालेख, चित्रालेखांचाही वापर केला जातो.

(१) आयतालेख / स्तंभालेख

हा आलेख काढताना कोणत्याही वर्गांतरातील वारंवारिता संपूर्ण वर्गांतरात समान प्रकारे वितरित झालेली आहेत, असे गृहीत धरले जाते. प्रत्यक्ष वारंवारिता विभाजन कोष्टकात जे वर्गांतर असते ते तसेच्या तसे न घेता सलग घेतले जाते. उदाहरणार्थ, 0-9, 10 - 19 ऐवजी 0 - 10, 10 - 20 कोणत्याही वर्गांतरातील वारंवारिता दाखविताना संपूर्ण वर्गांतर व्यापणारा काटकोन चौकोन अर्थात आयत काढावा लागतो. पुढचा आयत त्याला चिकटून घ्यावा लागतो. त्यामुळे संपूर्ण वितरणात आयतांची निरंतर साखळी तयार होते. लागोपाठच्या आयतामध्ये फट राहत नाही. आयतालेख आकृती ५ मध्ये दाखविला आहे. त्यासाठी कोष्टक ९ मधील माहितीचा वापर करण्यात आलेला आहे.

(अ) स्तंभालेख / आयतालेखाची उपयुक्तता

(१) तो यथार्थदर्शक असल्यामुळे गटाची आवश्यक ती माहिती तात्काळ मिळते. उदा. वर्गांतराची लांबी, वर्गांतरातील वारंवारिता, इत्यादी.

(२) या आलेखामुळे वितरणासंबंधी निश्चित माहिती तात्काळ कळते.

(आ) स्तंभालेख / आयतालेखाच्या मर्यादा

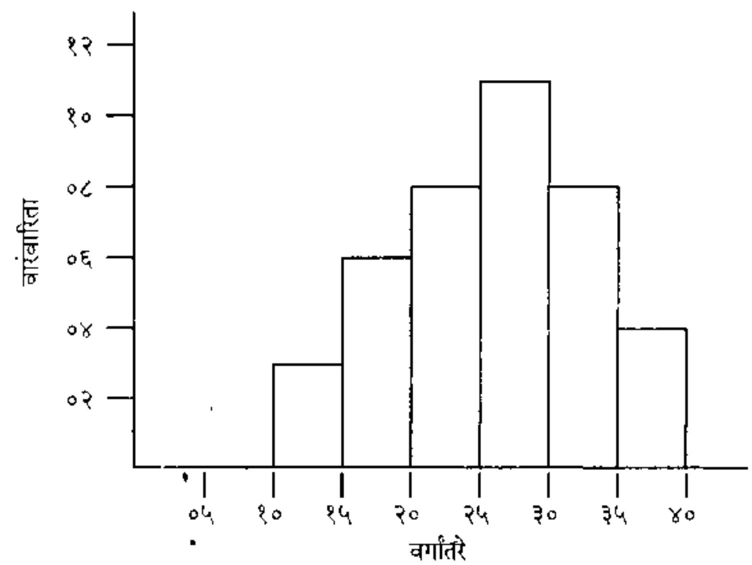
(१) आयतालेख हा पायऱ्या-पायऱ्या स्वरूपात दिसत असल्यामुळे वितरणाचा निश्चित चढ-उतार सहज लक्षात येत नाही. परिणामी वाढ आणि घट समगतीने झाली आहे की नाही ? हे निरीक्षणाने निश्चित करता येत नाही.

(२) एकाच आलेख पत्रावर दोनपेक्षा अधिक गटांचे आलेख काढले तर त्यामध्ये दुर्बोधता येते. त्यामुळे गटांची तुलना करण्यास हा आलेख निरुपयोगी ठरतो.

आयतालेखाच्या मर्यादा लक्षात घेता दोन वा अधिक गटांची तुलना करण्यासाठी दुसऱ्या आलेख प्रकाराचा वापर केला जातो त्यास वारंवारिता बहुभुज असे म्हणतात.

वर्गांतरे	गटाचे प्रत्यक्ष अंतर	मध्यबिंदू	वारंवारिता
३५-३९	३४.५-३९.४९	३७	४
३०-३४	२९.५-३४.४९	३२	८
२५-२९	२४.५-२९.४९	२७	११
२०-२४	१९.५-२४.४९	२२	८
१५-१९	१४.५-१९.४९	१७	६
१०-१४	९.५-१४.४९	१२	३
			N = ४०

कोष्टक ९ : वर्गांतरे आणि वारंवारिता



आकृती ४ : आयतालेख/स्तंभालेख

(२) वारंवारिता बहुभुज (Frequency Polygon)

हा आलेख काढताना वर्गांतरातील वारंवारिता संपूर्ण वर्गांतरभर विखुरलेली नसून वर्गांतराच्या मध्याशी केंद्रीत झालेली आहे, असे गृहीत धरले जाते. म्हणून वर्गांतरातील वारंवारिता दर्शविण्यासाठी वारंवारितेच्या उंचीवर वर्गांतरमध्याच्या ठिकाणी एक भरीव टिंब ठेवून त्याच्याभोवती छोटे पोकळ वर्तुळ काढतात. सर्व वर्गांतरातील वारंवारितेसाठी ही संकेत चिन्हे (Symbols) काढली जातात. नंतर लागोपाठची संकेत चिन्हे सरळ रेषेने जोडतात. पहिले संकेत चिन्ह शून्य बिंदूशी जोडले जाते तर शेवटचे संकेत चिन्ह सरळ रेषेतच वर्गांतराच्या अंतिम बिंदूशी जोडले जाते. अशा प्रकारे अनेक रेषा एकमेकींना जोडून तयार झालेली ही बंदिस्त आकृती म्हणजे बहुभुजाकृतीच असते म्हणून तिला वारंवारिता बहुभुज असे म्हणतात.

बहुभुजाकृती म्हणजे अनेक बाजूंनी तयार झालेली बंदिस्त आकृती हे तुम्हांला माहीत आहेच.

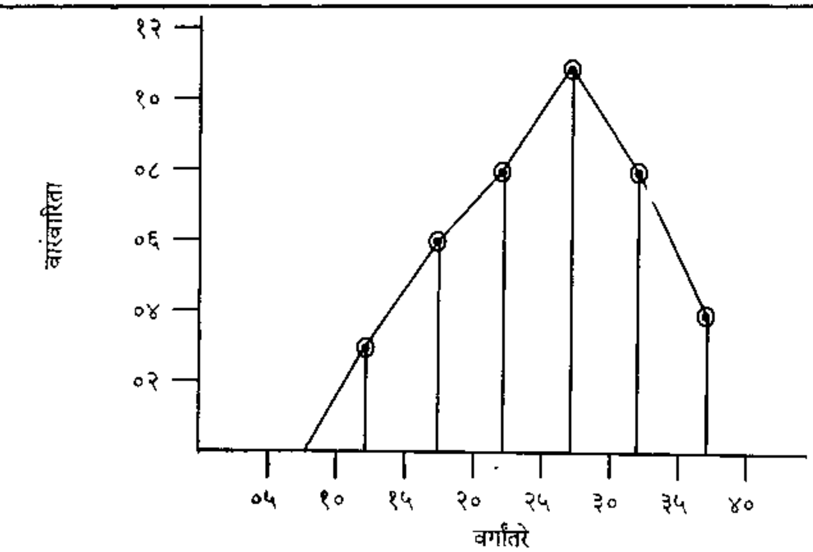
(अ) वारंवारिता बहुभुजाची उपयुक्तता

(१) वारंवारिता बहुभुजामध्ये रेषा कृती असल्यामुळे एका वर्गांतरातून पुढच्या वर्गांतराचा चढ-उतार सुस्पष्ट दिसतो.

(२) दोन किंवा जास्त गटाचे एकाच आलेखपत्रावर आलेख काढून गटाची तुलना करता येते.

(आ) वारंवारिता बहुभुजाच्या मर्यादा

(१) वारंवारिता बहुभुजावर नुसता दृष्टिक्षेप टाकला असता वर्गांतराची लांबी समजणे अवघड जाते. कोष्टक ९ मधीलं गुणांक घेऊन आकृती ५ मध्ये वारंवारिता बहुभुज काढून दाखविण्यात आलेला आहे.



आकृती ५ : बहुभुजाकृती

सरावासाठी स्वाध्याय

पुढील गुणांकावलीचा आयतालेख / स्तंभालेख काढा.

वर्गांतरे	वारंवारिता
०-९	१०
१०-१९	१५
२०-२९	१९
३०-३९	१४
४०-४९	०८

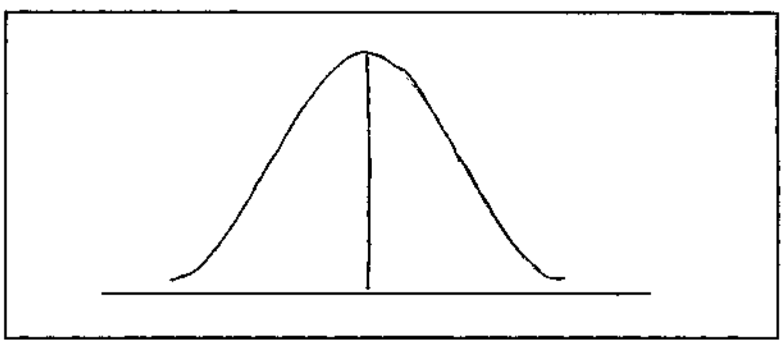
संशोधनाचा अर्थ लावण्यासाठी, निष्कर्ष मांडण्यासाठी आणि प्रमाणके तयार करण्यासाठी वारंवारिता बहुभुज जसाच्या तसा मात्र वापरत नाहीत. कारण त्याला अनेक वेडेवाकडे कंगोरे असतात. म्हणून वर्तमानकालीन गोष्टींचे विवेचन करण्यासाठी आणि भविष्यकालीन भाकिते करण्यासाठी हा

वारंवारिता बहुभुज सरलित करून त्याला मुक्त हस्तरेषेचे स्वरूप दिले जाते. सरलीकरणासाठी निरनिराळ्या आलेखीय आणि सांख्यिकी पद्धती उपलब्ध आहेत. हा सरलित केलेला वक्र संख्याशास्त्रामध्ये महत्त्वपूर्ण मानल्या गेलेल्या घंटाकृती प्रसामान्य संभव वक्रासारखा येतो. अनुमानात्मक सांख्यिकीमध्ये ह्या वक्राच्या क्षेत्रफळाविषयी गुणधर्मांचे फार मोठ्या प्रमाणात उपयोजन केले जाते. निरनिराळ्या प्रकारच्या मानसिक कसोट्या जसे बुद्धिमापन, प्राविण्य, अभियोग्यता, इत्यादी कसोट्यांसाठी या वक्राचे खूप उपयोग होतात. मानसशास्त्रज्ञांना आणि संशोधकांना या वक्राचा खूप उपयोग होतो. म्हणून या वक्राविषयी काही मूलभूत गोष्टी आपण समजावून घेऊ या.

७.० प्रसामान्य संभव वक्र (Normal Probability Curve - NPC)

कार्ल गॉस या जर्मन संशोधकाने १८३६ साली शुद्ध गणितामध्ये प्रसामान्य संभव वक्र प्रथम सिद्ध केला. त्याला संभाव्यता वक्र असेही म्हणतात. कारण निर्सगातील अनेक गोष्टी या वक्राप्रमाणे वितरित झालेल्या असतात. तसेच भविष्यातसुद्धा घडतात. फक्त सर्वसामान्य व्यक्तींच्या किंवा घटनांच्या बाबतीत या वक्राचा उपयोग होतो. अपसामान्य किंवा असामान्य व्यक्ती किंवा घटनांच्या- बाबतीत त्याचा उपयोग होत नाही.

उदाहरणार्थ, आपण लोकसंख्येतील बुद्धिमत्तेचे विभाजनाचे न्यादर्श घेतले तरी अगदी कमी आणि सर्वोत्तम बुद्धिमत्ता असणाऱ्या लोकांची संख्या खूपच कमी आढळते. मात्र एका विशिष्ट बिंदूजवळ समान बुद्धिमत्ता असलेल्या लोकांची संख्या कमाल असते. त्यानंतर शेवटी ती सुरुवातीप्रमाणे नगण्य किंवा जवळपास शून्य होते. हेच आकृती ६ मध्ये दाखविले आहे.



आकृती ६ : प्रसामान्य संभव वक्र

७.१ प्रसामान्य संभव वक्राचे गुणधर्म

ह्या प्रसामान्य संभव वक्राचे दोन प्रकारचे गुणधर्म असतात -

(अ) वक्राच्या आकारावरून ठरविले जाणारे गुणधर्म (Geometric or Graphical properties) आलेख आपण काढला तर त्याचा आकार घंटाकृती दिसतो. कमाल वारंवारिता बिंदूच्या दोन्ही बाजूला त्याचा चढ-उतार सारखाच आढळतो. म्हणजे एकाच गतीने चढ-उतार होताना दिसतो.

(आ) वक्राखालील क्षेत्रफळाच्या विभाजनावरून सांगितले जाणारे गुणधर्म. (Area Properties)

वक्राखालील क्षेत्रफळाच्या विभाजनावरून ठरविले जाणारे गुणधर्म हे सर्वात महत्त्वाचे व उपयोगाचे असतात. कारण त्यांचा उपयोग करूनच ह्या वक्राचे व्यवहारातील उपयोजन शक्य होते.

(आ) वक्राखालील क्षेत्रफळाच्या विभाजनावरून सांगितले जाणारे गुणधर्म

(१) या वक्राच्या शीर्ष / कमाल उंच बिंदूपासून 'क्ष' अक्षावर लंब टाकला तर 'क्ष' अक्षाला ज्या बिंदूत तो मिळतो. त्या ठिकाणी आपणांस केंद्रीय प्रवृत्तीची तीनही मापने भूयिष्टिक, मध्यांक आणि मध्यमान मिळतात.

(२) शीर्ष बिंदूपासून काढलेल्या लंब वक्राचे आकार आणि क्षेत्रफळाचे दोन समान भाग करतात. हे आकार शिरोलंबाशी संमिताकार असतात. प्रत्येक भागाचे क्षेत्रफळ एकूण क्षेत्रफळाच्या ५०% इतके असते.

या वक्राच्या क्षेत्रफळाचे मापन मध्यमानापासून सुरू करावे लागते. म्हणून तो क्षेत्रफळ मापनाचा प्रारंभबिंदू असतो. हे मापन मोजण्यासाठी प्रमाण विचलन (σ) हे एकक वापरतात. वक्राचा विस्तार व्यावहारिक उपयोगासाठी व संशोधनासाठी मध्यमानाच्या खाली ३σ आणि मध्यमानाच्या वर ३σ एवढा मर्यादित करतात. त्या अंतरात गटातील एकूण वारंवारितेची वाटणी केली जाते. (क्षेत्रफळ म्हणजेच गटातील शेकडा वारंवारिता असते.)

आपण प्रसामान्य संभव वक्रातील एका भागाचे क्षेत्रफळ मोजले की सममितीकारामुळे दुसऱ्या भागात तितकेच σ अंतर घेतले तर समान क्षेत्रफळच मिळते. वक्राचे एकूण क्षेत्रफळ १०० मानले तर त्या वक्रावर काही मुख्य बिंदू निश्चित करून त्यावरून एक कोष्टक तयार होते.

मध्यमानापासून (M) १σ अंतरापर्यंत पुढे गेल्यास तेवढ्या मर्यादेपर्यंत ३४.१३ टक्के क्षेत्रफळ असते. म्हणजेच $M \pm 1\sigma$ या अंतरात एकूण ६८.२६% इतके क्षेत्रफळ / जनसंख्या असते. याचा संशोधनासाठी खूप उपयोग होतो. कारण त्यामुळे सर्वसामान्य (Average) लोकांची संख्या आणि त्यांची गुणवत्ता (Quality) ह्या दोघांचा बोध होऊ शकतो. M पासून $M \pm 2\sigma$ इतक्या अंतरापर्यंत गेल्यास एकूण क्षेत्रफळापैकी ४७.७२% क्षेत्रफळ मिळते. तेवढेच $M - 2\sigma$ अंतरापर्यंत मागे गेल्यावरसुद्धा मिळते. म्हणून $M \pm 2\sigma$ या अंतरात ९५.४४% अंदाजे ९५% क्षेत्रफळ / जनसंख्या मिळते.

कुठल्याही संशोधनाची किंवा प्रयोगाची सुरुवात करताना त्यामध्ये किमान ९५% जनसंख्येचे प्रतिनिधी घ्यावेच लागतात. म्हणून ९५% जनसंख्येचे प्रतिनिधी कोणत्या गुणांक मर्यादेतून घेतले पाहिजे, हे समजण्यासाठी क्षेत्रफळविषयक या दुसऱ्या गुणधर्माचा खूप उपयोग होतो. $M + 3\sigma$ या अंतरात ४९.८६५% क्षेत्रफळ असते आणि $M \pm 3\sigma$ या अंतरात ९९.७३% म्हणजे जवळ- जवळ १००% क्षेत्रफळ व्यापले जाते. क्षेत्रफळाचा अतिशय क्षुल्लक भाग ०.२७% शिल्लक राहतो. आपण कितीही अंतर मोजले तरी १००% पूर्ण क्षेत्रफळ आपणांस मिळू शकणार नाही म्हणून संशोधनासाठी अंतिम मर्यादा म्हणून $M \pm 3\sigma$ या अंतरावरील लोक निवडतात. त्याच्या पलीकडे जाण्याचे संशोधकाला कारण नसते. कारण $M \pm 7\sigma$ च्या पलीकडेसुद्धा १ कोटी लोकांपेक्षा एक व्यक्ती असतेच. हे क्षेत्रफळविषयक ३ महत्त्वपूर्ण गुणधर्म आपल्याला पुढीलप्रमाणे मांडता येतील.

	अंतर	*क्षेत्रफळ*
(1)	$M \pm 1\sigma$	६८.२६%
(2)	$M \pm 2\sigma$	९५.४४%
(3)	$M \pm 3\sigma$	९९.७३%

सर्व व्यावहारिक आकडेमोडी आणि संशोधनासाठी प्रसामान्य संभव वक्राची लांबी अमर्याद न घेता फक्त 6σ इतकीच घेतली जाते. हा प्रसामान्य संभव वक्र शुद्ध गणितातील आहे. प्रत्यक्ष संशोधनात किंवा प्रयोगात तंतोतंत प्रसामान्य संभव वक्र कधीच मिळत नाही. तो वारंवारिता बहुभुजाचे संस्कारित रूप आहे. ही गोष्ट लक्षात ठेवावी.

७.२ प्रसामान्य संभव वक्राच्या विकृती

संशोधकांनी आधारसामग्रीवरून वक्र काढल्यानंतर त्यात चार प्रकारच्या त्रुटी किंवा विकृती आढळून येतात. त्या अशा -

(१) विषमितता (Skewness - sk)

(२) शिखरदोष (Kurtosis- ku)

(३) स्थानांतर (Shifting)

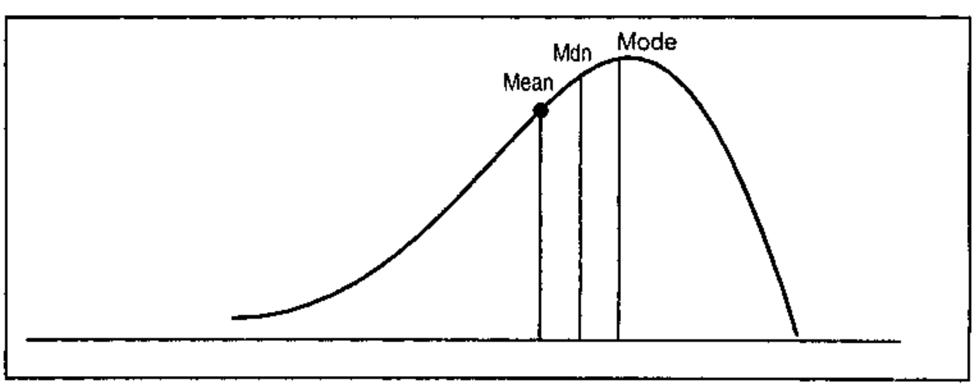
(४) अनियमित वितरण (Non-Normal Distribution)

पहिल्या तीन विकृती निर्माण होण्यासाठी चार मूलभूत कारणांपैकी एक किंवा सर्व कारणे असू शकतील.

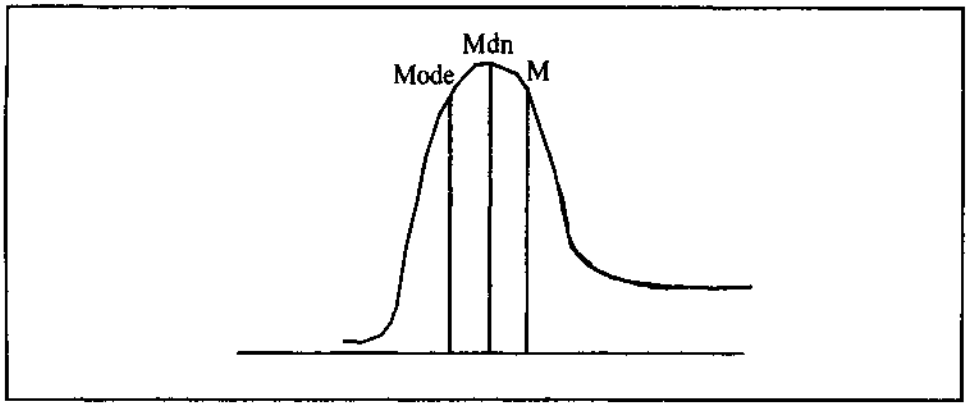
- न्यादर्श निवडीतील दोष
- मापन साधननिर्मितीतील दोष
- मापनाच्या प्रशासनातील व पर्यवेक्षणातील त्रुटी
- मूल्यमापनातील त्रुटी

(१) विषमितता (Skewness)

ज्यावेळी प्राप्त झालेल्या आदर्श वक्राप्रमाणे, वक्राची दोन्ही टोके मध्यापासून समान अंतरावर नसतात, वक्राचे उजव्या किंवा डाव्या हाताचे शेपूट लांब असते तेव्हा त्या वक्राला विषमित वक्र (Skewed Curve) असे म्हणतात. त्यात केंद्रीय प्रवृत्तीची तीनही परिमाणे एका बिंदूत मिळत नाहीत. डाव्या हाताला जेव्हा लांब शेपूट असते तेव्हा त्यास ऋण विषमित वक्र असे म्हणतात. तर शेपूट उजव्या बाजूला जास्त लांब असेल तर त्याला धन विषमित वक्र असे म्हणतात. हे आकृती क्र. ७ व ८ मध्ये दाखविले आहे.



आकृती ७ : ऋण विषमित वक्र



आकृती ८ : धन विषमित वक्र

ऋण आणि धन विषमित वक्रांतील फरक पुढे थोडक्यात मांडलेला आहे.

धनविषमित वक्र	ऋण विषमित वक्र
(१) प्रथम भूयिष्टिक नंतर मध्यांक आणि शेवटी मध्यमान येते.	(१) प्रथम मध्यमान नंतर मध्यांक आणि शेवटी भूयिष्टिक येतो.
(२) मध्यमानापेक्षा कमी गुण मिळविणाऱ्याची संख्या ५०% पेक्षा जास्त असते.	(२) मध्यमानापेक्षा जास्त गुण मिळविणाऱ्यांची संख्या ५०% पेक्षा जास्त असते.
(३) न्यादर्श निम्नश्रेणीतील घटकांचा कसोटी कठीण, प्रशासन कठोर आणि मूल्यमापन भलतेच काटेकोर असते.	(३) न्यादर्श उच्च श्रेणीतील घटकांची कसोटी सोपी, प्रशासन ढिसाळ आणि मूल्यमापन सढळ हस्ते केलेले असते.

कोष्टक १० : विषमित वक्र आणि ऋण विषमित वक्र यांतील फरक

वक्राची विषमितता काढण्यासाठी एक सोपे सूत्र वापरतात.

$$\text{विषमितता (SK)} = \frac{3\,(M\text{-}Mdn)}{\sigma}$$

M = मध्यमान

Mdn = मध्यांक

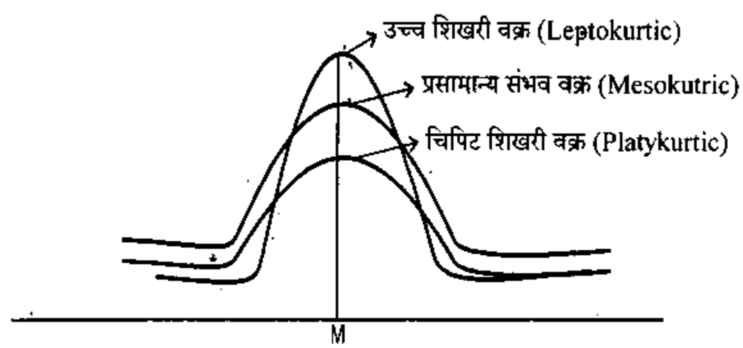
σ = प्रमाण विचलन

जर मध्यांक मध्यमानापेक्षा मोठा असेल तर ऋण विषमितता येईल आणि मध्यांक मध्यमानापेक्षा लहान असेल तर धन विषमितता येईल. हे तुमच्या सहज लक्षात येईल.

(२) शिखरदोष (Kurtosis)

ज्यावेळी संशोधनातून मिळणाऱ्या वितरण वक्राचा आकार प्रसामान्य संभव वक्राप्रमाणे असतो.

परंतु त्याचा शीर्ष / कमाल वारंवारिता बिंदू प्रसामान्य संभव वक्राच्या शीर्ष बिंदूपेक्षा जास्त उंचीचा किंवा कमी उंचीचा असतो तेव्हा त्या विकृतीस शिखरदोष असे म्हणतात. प्रसामान्य संभव वक्रापेक्षा वक्राचे शिखर जास्त उंचीचे असेल तर त्यास उच्चशिखरी (Leptokurtic) आणि कमी उंचीचे शिखर असेल तर त्याला चिपिटशिखरी (Platykurtic) असे म्हणतात. आपण जो प्रसामान्य संभव वक्र म्हणतो त्याला मध्यमशिखरी (Mesokurtic) वक्र म्हणतात. शिखरदोष असलेल्या वक्रांना एकच शीर्षबिंदू असतो आणि केंद्रीय प्रवृत्तीची तीनही मापने एकाच बिंदूत असतात. फक्त विस्तारात दोष असतो. हेच आकृती क्रमांक ९ मध्ये दाखविले आहे.



आकृती ९ : प्रसामान्य संभव वक्रातील शिखरदोष

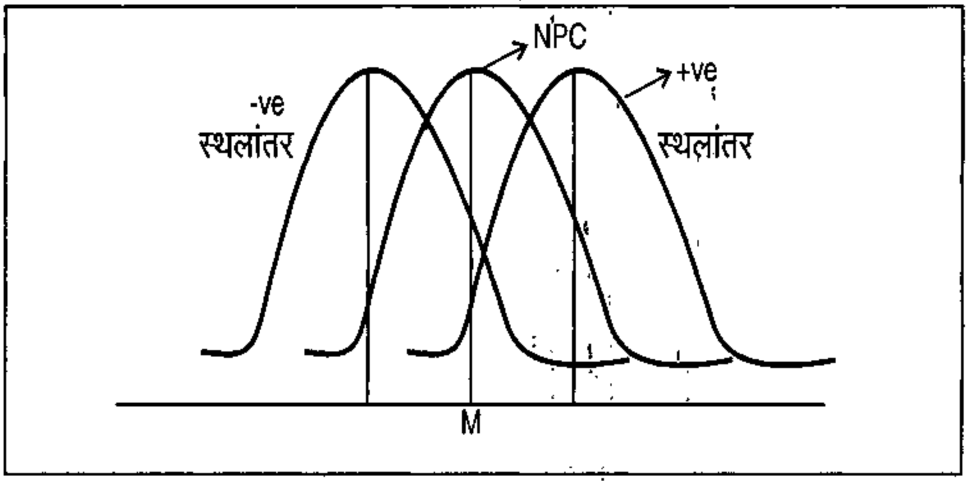
शिखर दोषातील फरक पुढे चौकटीत थोडक्यात दिलेला आहे.

उच्चशिखरी वक्र	*चिपिटशिखरी वक्र*
* वक्राचा विस्तार कमी असतो.	* वक्राचा विस्तार जास्त असतो.
* मध्यमानापासून $\pm 1\sigma$ अंतरापर्यंत ६८.२६% टक्क्यांपेक्षा जास्त लोक आढळतात.	* मध्यमानापासून $\pm 1\sigma$ अंतरापर्यंत ६८.२६% टक्क्यांपेक्षा कमी लोक आढळतात.
* न्यादर्श पूर्णपणे समजातीय असतो.	* न्यादर्श पूर्णपणे विषमजातीय असतो.
* चाचणी खूप सोपी किंवा खूप कठीण असते.	* चाचणीत कमी-अधिक प्रमाणात काठिण्य पातळीचे प्रश्न असतात.
* कठोर प्रशासन आणि काटेकोर मूल्यमापन असते.	* ढिले प्रशासन आणि सढळ मूल्यमापन असते.

कोष्टक ११ : उच्च शिखरी वक्र आणि चिपिट शिखरी वक्र यांतील फरक

(३) स्थानांतर

ह्या वक्राचा आकार घंटाकृती प्रसामान्य संभव वक्राप्रमाणेच असतो परंतु केंद्रीय प्रवृत्ती अपेक्षित स्थानी येत नसते. हेच आकृती १० मध्ये दाखविले आहे.



आकृती १० : प्रसामान्य संभव वक्रांचे स्थानांतर

सर्वसामान्यपणे जनसंख्येसाठी केंद्रीय प्रवृत्तीची जी प्रमाणके निश्चित केलेली असतात. त्यापेक्षा कमी किंवा जास्त अशी प्रमाणके स्थानांतरित वक्रामध्ये मिळतात.

उदाहरणार्थ, बुद्धिमत्तेचे मध्यमान शंभर मानले जाते पण तुम्ही संशोधन केलेल्या गटाची सरासरी बुद्धिमत्ता ९० येत असेल तर ते ऋण स्थानांतर आणि ११० येत असेल तर ते धन स्थानांतर झाले असे समजावे.

स्थानांतर = Ms - Mpop

MS = Mean of the sample न्यादर्शाचे मध्यमान

M pop = Mean of the Population लोकसंख्येचे मध्यमान

ऋण आणि धन स्थानांतर पुढील परिस्थितीत आढळते.

ऋण स्थानांतर	धन स्थानांतर
(१) न्यादर्श निकृष्ट लोकसंख्येतील असेल.	(१) न्यादर्श गुणवत्तापूर्ण लोकसंख्येतील असेल.
(२) कसोटी, वय आणि प्राविण्य यांच्या तुलनेत, कठीण असेल.	(२) कसोटी, वय आणि प्राविण्य यांच्या तुलनेत सोपी असेल.
(३) कसोटीचे प्रशासन कठोर असेल.	(३) कसोटीचे प्रशासन ढिसाळ असेल.
(४) काटेकोर मूल्यमापन केले असेल.	(४) सढळ मूल्यमापन केले असेल.

कोष्टक १२ : ऋण स्थानांतर आणि धन स्थानांतरातील फरक

(४) अनियमित विवरण (Non-Normal Distribution)

लोकसंख्येच्या सर्व वैशिष्ट्यांसाठी आणि सर्व प्रकारच्या व्यक्तिगुणांच्या विभाजनासाठी प्रसामान्य विभाजन हा काही सरसकट नियम नाही एवढेच नाही तर ज्यांचे प्रसामान्य विभाजन आहे असे आपण म्हणतो त्यामध्येसुद्धा अनेक वेळा अपसामान्य विभाजन आढळते.

उदाहरणार्थ -

(१) तेरा वर्षाचे सौर डागाचे चक्र.

(२) पर्जन्यमानाचे सात वर्षाचे चक्र

अग्रगण्य संशोधक थॉर्नडाइक यांनी असे म्हटले आहे की, प्रत्येक बाबतीत प्रसामान्य विभाजनच असेल असा दृढ समज करून घेण्यात काही अर्थ नाही. कारण निसर्गाला अनियमिततेचा मुळीच तिटकारा नाही आणि काही व्यक्तिगुण तर प्रसामान्य संभव वक्राप्रमाणे मुळी वितरितच झालेले नसतात, हेही ध्यानात ठेवले पाहिजे.

उदाहरणार्थ - बुद्धिमत्तेची वाढ, वेळेअगोदर उपस्थित राहण्याची सवय, उशिरा येण्याची सवय यात फक्त अर्धा वक्र असेच वितरण आढळते. त्यांना जे (J) आकाराचा वक्र असे म्हणतात. कधी कधी तर काही व्यक्तिगुणांच्या बाबतीत हा वक्र पूर्णपणे उलटा झालेला आढळतो. माणसाचे वय आणि त्याचा सूचना ग्रहण निर्देशांक (Suggestivity index) यांचा आलेख काढला तर तो इंग्रजी U आकारासारखा येतो म्हणून त्याला U प्रकारचा वक्र असे म्हणतात. याशिवाय अनेक वेळा वक्राला दोन, तीन किंवा तीनापेक्षा जास्त शिखरेसुद्धा येतात त्यांना बहुशिखरी वक्र असे म्हणतात.

संशोधनासाठी निवडलेला न्यादर्श हा शक्यतो खऱ्या जनसंख्येचे १००% प्रातिनिधिक नसल्यामुळे विषमितता, शिखरदोष, स्थानांतर अनुभवास येते तर कधी कधी प्रसामान्यता हा गुणधर्म काही गुणविशेषांच्या बाबतीत सत्य नसतो.

सरावासाठी स्वाध्याय

गट - १		*गट - २*	
(१)	विषमितता	(क)	गुणांकाचे विभाजन उत्पसामान्य आहे.
(२)	शिखरदोष	(ख)	वक्राची कमाल वारंवारिता बिंदू प्रसामान्य संभव वक्रापेक्षा जास्त किंवा कमी असते.
(३)	स्थानांतर	(ग)	केंद्रीय प्रवृत्तीचे सर्व परिमाणे एकाच बिंदूत मिळत नाही.
(४)	अनियमित वितरण	(घ)	केंद्रीय प्रवृत्ती अपेक्षित स्थानी येत नाही.

संशोधनामध्ये प्रसामान्य विभाजन वक्राच्या विविध गुणधर्मांचा वापर करून प्रगत सांख्यिकीय विश्लेषण केले जाते.

ह्यापूर्वी संख्याशास्त्रात तुम्ही अनेक व्यक्तींच्या एकाच गुणविशेषाची / चलाची मोजदाद केली आहे. (उदा. त्यांची वजने, गणित विषयातील गुणांक, वगैरे) पण प्रत्यक्ष व्यवहारात मात्र आपण अनेकवेळा व्यक्तीच्या २ गुणविशेषांमध्ये काहीतरी परस्परसंबंध असल्याचे सहज बोलून जातो

उदाहरणार्थ,

(१) गणितात हुशार असणारे विद्यार्थीच विज्ञान शाखेत चांगले यश मिळवतात.

(२) वर्गात बुद्धिमान म्हणून ओळखले जाणारे विद्यार्थी क्रिडांगणावर चमकत नाहीत

(३) संगीतामध्ये प्रावीण्य दाखविणारा विद्यार्थी हुशार आहे की मठ्ठ हे नेमके सांगता येत नाही. ह्यालाच संख्याशास्त्रात सहसंबंध असे म्हणतात. त्यासाठी किमान दोन गोष्टीतील मापन माहीत असावे लागते, ते आपण पाहू या.

८.० सहसंबंध आणि सहसंबंध गुणांक (Correlation and Coefficient of Correlation)

- ★ दिवाळीच्या सुमारास पिके शेतकऱ्याच्या हातात असतात. त्यामुळे तो आनंदाने दिवाळी साजरी करतो.
- ★ कापड गिरणी दोन वर्षांपासून बंद असल्यामुळे तुकारामला वर्षातील सर्व दिवस सारखेच वाटतात.
- ★ दिवाळीत फटाके वाजविताना गणपतच्या मुलाने काळजी घेतली नाही त्यामुळे त्याला अंधत्व प्राप्त झाले.

जीवनातील वरील तीनही उदाहरणांत दोन गोष्टींचा परस्परसंबंध तुमच्या लक्षात आला असेलच.

जेव्हा तुम्ही व्यक्तीचे वा व्यक्तिगटाचे कोणते तरी दोन गुणविशेष विचारात घेता आणि त्यांच्यामध्ये काहीतरी परस्परसंबंध अर्थात सहसंबंध निश्चित करण्याचा प्रयत्न करत असता हा सहसंबंध कोणत्या प्रकारचा आहे. (म्हणजे एक गुणविशेष वाढला तर दुसरा वाढतो की कमी होतो की त्यांच्यातील नेमका सहसंबंध सांगता येत नाही.) हे स्पष्ट करण्याचा प्रयत्न केलेला असतो. हीच गोष्ट संख्याशास्त्राने सांगणे म्हणजे सहसंबंधाचे वर्णन करणे होय. वर दिलेल्या विधानांमध्ये नकळत तीन प्रकारचे सहसंबंध असतात, हेसुद्धा आपण सांगून टाकले आहे.

(१) एका गुणविशेषात वाढ झाली की, दुसऱ्यात वाढ होते. पर्यायाने एकात घट झाली की दुसऱ्यातही घट होते. अशा सहसंबंधाला धन सहसंबंध असे म्हणतात. उदाहरणार्थ, गणित आणि विज्ञानातील सहसंबंध.

(२) एकात वाढ झाली तर दुसऱ्यात हमखास घट होते. म्हणजे दुसऱ्यात वाढ झाली तर पहिल्यामध्ये हमखास घट होते. अशा सहसंबंधाला ऋण सहसंबंध असे म्हणतात. उदाहरणार्थ, बुद्धिमान विद्यार्थी क्रिडांगणावर चमकत नाहीत.

(३) एका गुणविशेषातील घटीचा किंवा वाढीचा दुसऱ्या गुणविशेषातील वाढीशी किंवा घटीशी निश्चित सहसंबंध सांगताच येत नाही. एकात वाढ झाली तर दुसऱ्यात वाढ होईल, घट होईल का संपादन स्थिर राहील. ह्यांपैकी आपणांस परस्परसंबंधात काहीच सांगता येत नाही तेव्हा दोघांत शून्य सहसंबंध असे म्हणतात. म्हणजे काहीच परस्परसंबंध नाही. उदाहरणार्थ, गणित व संगीतातील सहसंबंध

तीनही प्रकाराचे एकत्रित व कल्पित, गंमतीदार उदाहरण कोष्टक १३ पाहू या !

विद्यार्थी	*गणितातील गुण*	*विज्ञानातील गुण*	*इंग्लिशमधील गुण*	*चित्रकलेतील गुण*
अ	४५	४०	३०	४६
ब	४२	३८	३२	४९
क	४०	३६	३५	४८
ड	३७	३५	३७	३५
इ	३५	३२	४०	३३

कोष्टक १३ : विविध विषयांतील सहसंबंध

ह्या कल्पित उदाहरणामुळे जे रेखाचित्र निर्माण झाले त्यात असे दिसते की, गणित आणि विज्ञान ह्या विषयातील समान क्रमांक जोडणारे बाण परस्परांना समांतर आहेत म्हणून हा आदर्श धन सहसंबंध आहे तर विज्ञान व इंग्लिशमधील समान क्रमांक जोडणारे बाण परस्परांना एकाच बिंदूत छेदतात म्हणून तो आदर्श ऋण सहसंबंध आहे तसेच इंग्लिश आणि चित्रकलेमधील समान क्रमांक जोडणारे बाण परस्परांना अनेक बिंदूत छेदताना दिसतात म्हणून हा शून्य सहसंबंध होय. हा सहसंबंध काढण्यासाठी स्पिअरमन p (ऱ्हो) आणि पिअरसनच्या (r) या सूत्रांचा वापर केला जातो. ते आपण समजावून घेऊ.

सहसंबंध गुणक : ह्यासाठी जॉन स्पिअरमन यांनी ग्रीक भाषेतील ऱ्हो (p) हे अक्षर संकेतचिन्ह म्हणून वापरले आहे. तुमच्या सहज लक्षात आले असेल की, वर वर्णन केलेल्या सर्व गोष्टी शाब्दिक वर्णनाच्या आहेत पण संख्याशास्त्रात सर्व गोष्टी संख्येत किंवा गुणांकात सांगाव्या लागतात. सहसंबंध ज्या संख्येने वा अंकाने दाखवला जातो त्याला सहसंबंध गुणक असे म्हणतात. म्हणजे दोन बदलणाऱ्या गोष्टी (चले) ह्यामध्ये सहसंबंध काढला जातो. मात्र ह्या दोन चलांमधील सहसंबंध नेहमी स्थिर म्हणजे न बदलणारा असतो. त्याला आपण अचल किंवा स्थिरांक म्हणू. ह्यावरून सहसंबंध गुणकाची व्याख्या - **'दोन चलांमधील सहसंबंधाची किंमत (मान) दर्शवणाऱ्या अचल गुणांकास वा स्थिरांकास सहसंबंध गुणक म्हणतात'**. (चल म्हणजे Variables, अचल Constant.) त्यांच्या कमाल किंमती स्पिअरमनने ठरवून दिलेल्या आहेत.

सर्वात मोठ्या धन म्हणजे आदर्श धन सहसंबंध गुणकाची किंमत + १ असते तर सर्वात मोठ्या ऋण म्हणजे आदर्श ऋण सहसंबंधाची किंमत -१ असते त्यामुळे सहसंबंध गुणकाची किंमत हा नेहमी -१ ते +१ ह्या मर्यादेतच येत असते.

-१ पासून +१ पर्यंत जाताना मध्ये ० येईल. हे तुम्हांला संख्यारेषेवरून सहज समजू शकेल.

सहसंबंध गुणकाच्या किंमती (p चा विस्तार)

-१ ० +१

ह्यावरून p च्या किंमती +१ किंवा -१ असतील तर ते उच्च दर्जाचे म्हणजे निश्चित सहसंबंध आहेत म्हणून ते अतिशय लक्षणीय व निश्चित आहेत. ते कमाल सहसंबंध आहेत. उलट p = ० हा म्हणजे अजिबात सहसंबंध नाही. तो दुर्लक्षणीय सहसंबंध आहे. किमान सहसंबंध आहे. त्यामुळे कोणी जर असे विधान केले की, '१ हा किमान सहसंबंध नाही' तर ते बरोबर आहे आणि '०' हा किमान सहसंबंध आहे अशी पुस्ती तुम्ही चटकन जोडू शकाल. अर्थात आदर्श किंवा नमुनेदार परिस्थितीतच +१ किंवा -१ ह्या किंमती येऊ शकतात. आपण नेहमी व्यावहारिक गोष्टींचा विचार करीत असतो. त्यामुळे व्यवहारात अशा आदर्श किंमती आपणांस मिळत नाहीत. ह्या किंमती +१ पेक्षा कमी किंवा -१ पेक्षा जास्त (उदा. -०.९९) येतात. त्यामुळे व्यावहारिक आकडेमोडीत p च्या किंमती +.९९ ते -.९९ च्या दरम्यान येतात. **म्हणूनच व्यावहारिक परिस्थितीत सहसंबंध गुणकाची किंमत नेहमी अपूर्णांकातच येते, हे आपण लक्षात ठेवले पाहिजे.)**

गुणांकावरून त्याचा अन्वयार्थ कसा लावावा हे कोष्टक १४ मध्ये दिलेले आहे.

p/r *ची किंमत*	*अन्वयार्थ*
± ०.२० पेक्षा कमी	शून्य सहसंबंध
± ०.२० ते ०.३९	अल्प पण निश्चित सहसंबंध
± ०.४० ते ०.७०	वैध आणि विश्वसनीय सहसंबंध
± ०.७० ते ०.९०	उच्च सहसंबंध
± ०.९० ते १.००	आदर्श (नमुनेदार पूर्ण) सहसंबंध

कोष्टक १४ : सहसंबंधाची किंमत आणि त्याचा अन्वयार्थ

सहसंबंध गुणक काढण्याच्या स्पिअरमन, पिअरसन, फिशर, इत्यादी संख्याशास्त्रज्ञांनी वेगवेगळ्या पद्धती विकसित केलेल्या आहेत आणि त्या सहसंबंध गुणकांना वेगवेगळी नावे दिली आहेत. आपण फक्त स्पिअरमन आणि पिअरसन ह्यांच्या पद्धतीचाच विचार करणार आहोत.

८.१ स्पिअरमनची गुणानुक्रम पद्धती (Spearman's Rule / Rank Difference Method)

सगळ्यात सोपी असलेली आणि प्रत्यक्ष गुणांकावरून क्रमांक लावण्याची तुम्ही वापरीत असलेली पद्धतीच वापरणार आहोत तिला स्पिअरमनची गुणानुक्रम (Rank-Rule) पद्धती म्हणतात. येथे आपण एकाच व्यक्तीच्या दोन वेगवेगळ्या विषयातील गुणानुक्रमातील फरक (Rank-Difference) लक्षात घेतो म्हणून तिला श्रेणी-अंतर पद्धती असेही म्हणतात. ही पद्धत आपण वापराल त्यावेळी गुणानुक्रम अर्थात श्रेणी (Ranks) मांडाल तेव्हा काही गोष्टी लक्षात ठेवा.

(१) सर्वात मोठ्या गुणांकाला पहिला क्रमांक द्या नंतर उतरत्या क्रमाने सर्वात लहान गुणांकाला शेवटचा क्रमांक द्या.

(२) कोणताही क्रमांक गाळू नका किंवा पुनरावृत्त करू नका.

(३) समान गुणांकांना समान क्रमांक दिले पाहिजेत. जेव्हा १ पेक्षा अधिक विद्यार्थ्यांना विषयांमध्ये समान गुणांक मिळतात त्यांचे ओळीने मिळणारे क्रमांक ठरवा. त्या सर्वांची बेरीज करा आणि बेरजेला विद्यार्थ्यांच्या संख्येने भागून क्रमांकाची सरासरी काढा व हा सरासरी क्रमांक त्या सर्व गुणांकांना द्या. क्रमांक जरी पुनरावृत्त करता येत नसला तरी सरासरी मात्र कितीही वेळा पुनरावृत्त करता येते.

(४) पुढच्या गुणांकाला वापरून झालेल्या क्रमांकानंतरचा क्रमांक घ्या. (समजा, ३ विद्यार्थ्यांना प्रत्येकी ४५ हा गुणांक मिळाला असेल आणि त्यांचेसाठी ४, ५, ६ हे क्रमांक असतील तर सर्वांना

$\frac{४+५+६}{३} = \frac{१५}{३} = ५$ हा क्रमांक द्या. मात्र ४५ नंतर लगेच येणाऱ्या गुणांकाला ७ हा क्रमांक घ्या. कारण ६ पर्यंत क्रमांक वापरून झाले आहेत आणि वर वापरलेला ५ हा क्रमांक म्हणजे सरासरी आहे, हे विसरू नका.)

(५) गटामध्ये जितके गुणांक आहेत तितके क्रमांक वापरले गेले की नाहीत ? ह्याची दोन्ही विषयाबाबत खात्री करा.

एकाच विद्यार्थ्याच्या दोन्ही चलांमध्ये क्रमांकांचा जो फरक पडतो (D म्हणजे Difference) तो अचूक मांडला जाणे गरजेचे आहे. व D चा वर्ग घेतल्याने फरकाच्या चिन्हामुळे फरक पडत नाही.

प्रत्यक्ष उदाहरण घेऊन आपण सहसंबंध गुणक काढून पाहू. उदाहरण कोष्टक १५ मध्ये दिलेले आहे. वर उल्लेख केलेल्या पायऱ्यांनुसार त्यांचे गुणानुक्रम ठरवून त्यातील फरक व त्याचा वर्ग घेतलेला आहे.

विद्यार्थी	*सहामाही परीक्षा शेकडा गुण*	*वार्षिक परीक्षा शेकडा गुण*	R_1 *सहामाही अनुक्रम*	R_2 *वार्षिक अनुक्रम*	*श्रेणी / अंतर* $D = R_1 - R_2$	D^2
क	६५	५४	२.५	३	- ०.५	०.२५
ख	४८	४७	८.५	६.५	२.००	४.००
ग	६५	५१	२.५	४.५	-२.००	४.००
घ	९६	७०	१	१	०.००	०.००
च	५७	५१	५	४.५	०.५	०.२५
छ	४८	४०	८.५	८.५	०.००	०.००
ज	५२	४७	६	६.५	- .५	०.२५
झ	४८	४०	८.५	८.५	०.००	०.००
ट	४८	३८	८.५	१०	- १.५	२.२५
ठ	६०	५५	४	२	२.००	४.००

N = १० $\sum D^2$ = १५

कोष्टक १५ : स्पिअरमनची गुणानुक्रम पद्धतीद्वारे सहसंबंध गुणांक

स्पष्टीकरण :

R_1 काढताना ६५ ह्या गुणांकासाठीअनुक्रमांक = $\frac{२ + ३}{२} = \frac{५}{२}$ = २.५

R_1 काढताना ४८ गुणांकासाठी अनुक्रमांक =

$$\frac{७+८+९+१०}{४} = \frac{३४}{४} = ८.५$$

R_2 काढताना ५१ गुणांकासाठी अनुक्रमांक =

$$\frac{४+५}{२} = \frac{९}{२} = ४.५$$

R_2 काढताना ४७ गुणांकासाठी अनुक्रमांक =

$$\frac{६+७}{२} = \frac{१३}{२} = ६.५$$

R_2 काढताना ४० गुणांकासाठी अनुक्रमांक =

$$\frac{८+९}{२} = \frac{१७}{२} = ८.५$$

आता p = सहसंबंध गुणक

D = श्रेणी वा क्रमांकांतर

N = गटातील विद्यार्थ्यांची संख्या

माहीत झाल्यावर स्पिअरमनच्या सूत्राने p ची किंमत काढू.

$$p = १ - \frac{६\Sigma D^2}{N(N^2-1)}$$

$$\therefore p = १ - \frac{६ \times १५}{१०[(१०)^२-१)]}$$

$$\therefore p = १ - \frac{९०}{१०[१००-१]}$$

$$\therefore p = १ - \frac{९०}{१० \times ९९}$$

$$\therefore p = १ - \frac{९०}{९९०} = 1 - \frac{१}{११}$$

$$\therefore p = १ - ०.०९ = ०.९१$$

सहसंबंध गुणकाचे उत्तर ०.९१ आले. अगोदर चिन्ह नसले तरी ह्याचा अर्थ हे धन चिन्ह आहे. असे समजावे लागते. म्हणून हा धन सहसंबंध आहे. पण त्याचा नेमका अर्थ लावायचा कसा ?

उदाहरणाकडे नीट लक्ष दिले तर आपणांस हा चांगल्यापैकी धन सहसंबंध दिसतो. दोन्ही परीक्षातील गुणांकांना दिलेले क्रमांक एकमेकांशी पुष्कळच जुळतात. काही तर पूर्ण जुळतात आणि काहींमधील फरक अगदीच अल्प आहे. अशा वेळी ह्या सहसंबंधाचा अर्थ लावण्यासाठी कोष्टक १३ मध्ये त्याची माहिती दिलेली आहे. त्याचा जरा विचार करा. सहसंबंधाचे मूल्य दाखवणारे गट तेथे दिलेले आहेत. त्यापैकी ०.९१ हे मूल्य ०.९० पेक्षा जास्त ते ०.९९ ह्या गटात येते. त्याचा अन्वयार्थ हा उच्चतम दर्जाचा नमुनेदार आणि जवळपास आदर्श सहसंबंध आहे. मग ह्या आदर्श धन सहसंबंधाचा अर्थ काय लावणार ? धन सहसंबंध म्हणजे एकात प्रगती तर दुसऱ्यात प्रगती आणि दुसऱ्यात प्रगती तर पहिल्यात प्रगती असा समांतर सहसंबंध होय. त्यामुळे आपण असा निष्कर्ष मांडू शकतो की,

सहामाही परीक्षेतील विद्यार्थ्यांचे शेकडा गुण आणि वार्षिक परीक्षेतील त्याच विद्यार्थ्यांचे शेकडा गुण ह्यांच्यामध्ये आदर्श धन सहसंबंध आहेत. त्यामुळे ज्याला सहामाही परीक्षेत चांगले गुण मिळालेले आहेत त्याला वार्षिक परीक्षेतही हमखास चांगले गुण मिळालेले आहेत आणि वार्षिक परीक्षेत ज्यांना कमी गुण मिळाले आहेत. त्यांना सहामाही परीक्षेतही कमीच गुण मिळालेले होते हे निःर्विवादपणे आढळून येते.

सरावासाठी स्वाध्याय

निरनिराळ्या दोन विषयांमध्ये सापडलेल्या सहसंबंधाच्या गुणकांच्या किंमती अनुक्रमे p = ०.६०, p = ०.७५, आणि p = ०.१५, व p = ०.०९ आढळल्या आहेत तर ह्या चार गटांमध्ये दोन दोन विषयांचे गट घेतले होते. त्याच्यामध्ये आढळून येणाऱ्या विद्यार्थी प्रावीण्याचा विचार सहसंबंध गुणकांचा अन्वयार्थ लावून स्पष्ट करा.

स्पिअरमनच्या पद्धतीने सहसंबंध गुणक काढणे व्यावहारिक दृष्टिकोनातून उपयुक्त असले तरी हा सहसंबंध गुणक बराचसा सदोष असतो. कारण त्यामध्ये प्रत्यक्ष गुणांकाच्या मूल्यांचा विचार न करता फक्त त्याच्या श्रेणीचाच (गुणानुक्रमाचा) विचार केला जातो. परिणामी लागोपाठच्या श्रेणीमधील अंतर जरी समान असले तरी लागोपाठच्या गुणांकामधील अंतर प्रत्यक्षत: सर्वत्र एकसारखे असेलच असे मात्र आढळत नाही म्हणून ही अपरिमितीय चाचणी आहे. स्पिअरमनच्या सहसंबंध गुणांकांचा प्रमाणित सांख्यिकी काढताना फारसा वापर केला जात नाही. कारण

(१) या पद्धतीत गुणांकांमधील अंतर सर्वत्र एकसमान आहे. या चुकीच्या गृहितकाधारे सहसंबंध गुणांक काढला जातो.

(२) गटातील व्यक्तींची संख्या ३० पेक्षा जास्त असेल तर त्या पद्धतीतील आकडेमोड खूपच क्लिष्ट होत जाते.

(३) हा श्रेणी अंतर सहसंबंध आहे. खऱ्या सहसंबंधापेक्षा त्याची किंमत बहुसंख्य वेळा कमी किंवा जास्त येते. त्यामुळे प्रत्यक्ष गुणांकाचे प्रमाणबद्ध प्रतिबिंब त्यात दिसत नाही. म्हणून संशोधनासाठी स्पिअरमन सहसंबंधाऐवजी पिअरसन सहसंबंध गुणक काढण्यात येतो व त्यासाठी r (दुसऱ्या लिपीतील इंग्लिश आर हे अक्षर) हा संकेत (Symbol) वापरला जातो. त्याबाबतची सविस्तर माहिती पुढे दिलेली आहे.

८.२ पिअरसनचा सहसंबंध गुणक (Pearson's r)

संशोधनामध्ये दोन गटातील खरा सहसंबंध पाहण्यासाठीची विश्वसनीय आणि वैध पद्धती ही पिअरसनचा सहसंबंध गुणक हीच आहे. कारण -

(१) तो गुणांकाच्या मूल्याचे प्रमाणबद्ध प्रतिनिधित्व करतो.

(२) मोठ्या गटासाठी तो खूपच उपयुक्त ठरतो.

(३) दोनापेक्षाही जास्त व्यक्तिगुणांचा परस्परसंबंध काढण्यासाठीही तो वापरता येतो.

(४) गुणांक वितरण वारंवारिता विभाजन कोष्टक स्वरूपात असेल तरी त्याचा वापर करता येतो. यात प्रत्येक व्यक्तिगुणासाठी किंवा चलासाठी (Variable) गटाचे मध्यमान आणि प्रमाण विचलनही काढले जाते. त्यानंतर पिअरसनने तयार केलेल्या सूत्राप्रमाणे सहसंबंध गुणक (r) काढता येतो.

त्यासाठी पिअरसन यांनी मूळ सूत्र पुढीलप्रमाणे विकसित केलेले आहे.

$$r = \frac{\Sigma xy}{N\,\sigma x\,\sigma y}$$

येथे $x = X - Mx$ (x चलातील गुणांकाचे मध्यमानापासूनचे अंतर)

$y = Y - My$ (y चलातील गुणांकाचे मध्यमानापासूनचे अंतर)

X आणि Y हे प्रत्यक्ष व्यक्तिगुणांक किंवा चलाच्या किंमती असतात.

Mx आणि My हे त्या गटातील x आणि y या व्यक्तिगुणकांची / चलांची मध्यमाने असतात.

या पद्धतीने सहसंबंध गुणांक काढताना प्रथम प्रत्येक चलासाठी / व्यक्तिगुणकासाठी मध्यमाने काढावी लागतात. तसेच x, y, x^2, y^2 यांच्याही किंमती काढाव्या लागतात. येथे x व y ह्या विचलनांचा गुणाकार होत असल्यामुळे ह्या पद्धतीला गुणन विभ्रमिषा (Product moment) पद्धती असे म्हणतात.

कारण ज्यावेळी x व y ह्या चलासाठी प्रमाण विचलने काढावयाची असतात. तेव्हा -

$$\sigma x = \sqrt{\frac{\Sigma x^2}{N}}$$

$$\sigma y = \sqrt{\frac{\Sigma y^2}{N}}$$

हे काम सोपे करण्यासाठी पिअरसनचे मूळ सूत्र पुढील पद्धतीने परिष्कृत करून वापरले जाते. सोपे सूत्र पुढीलप्रमाणे तयार होते.

$$r = \frac{\Sigma xy}{N\,\sigma x\,\sigma y}$$

$$r = \frac{\Sigma xy}{N\sqrt{\frac{\Sigma x^2}{N} \times \frac{\Sigma y^2}{N}}}$$

$$r = \frac{\sum xy}{N\sqrt{\frac{\sum x^2 \ \sum y^2}{N}}}$$

$$r = \frac{\sum xy}{N\sqrt{\frac{\sum x^2 \ \sum y^2}{N}}}$$

$$r = \frac{\sum xy}{\sqrt{\sum x^2 \ \sum y^2}}$$

या सूत्रामुळे (गुणाकाराचे चिन्ह अध्याहृत असते. ते मांडले नाही तरी चालते.) चलासाठी प्रत्यक्ष प्रमाण विचलन काढण्याची गरज राहत नाही आणि केवळ मध्यमाने काढून r ची सरळ किंमत काढता येते. ही गोष्ट आपण एका छोट्या उदाहरणावरून प्रथम समजावून घेऊ. एका संशोधकाने गणित आणि विज्ञानातील सहसंबंध शोधण्याचा प्रयत्न केला तेव्हा मिळालेल्या आधारसामग्रीचे त्याने कोष्टक १६ प्रमाणे संस्करण केले.

विद्यार्थी	X	Y	x	y	xy	x^2	y^2
क	१०	१९	-६	-८	+४८	३६	६४
ख	१२	२२	-४	-५	+२०	१६	२५
ग	१३	२५	-३	-२	+६	०९	०४
घ	१५	२७	-१	०	०	०१	००
च	१७	२९	+१	+२	२	०१	०४
छ	२०	३०	+४	+३	१२	१६	०९
ज	२५ $\sum x$ = 112	३७ $\sum y$= 189	+९	+१०	९० $\sum xy$ = 178	८१ $\sum x^2$ = 160	१०० $\sum y^2$= 206

कोष्टक १६ : गणित आणि विज्ञानातील सहसंबंध

$$Mx = \frac{112}{7} \quad \text{व} \quad My = \frac{189}{7}$$

$$\therefore Mx = 16 \qquad \therefore My = 27$$

$$r = \frac{\Sigma xy}{\sqrt{\Sigma x^2 \ \Sigma y^2}}$$

$$r = \frac{178}{\sqrt{160 \times 206}}$$

$$r = \frac{178}{\sqrt{32960}}$$

$$r = \frac{178}{182} = .98$$

वरील उदाहरणात X आणि Y हे म्हणजे गणित आणि विज्ञान यांमधील सहसंबंध आहे. हा दोन गुणांतील / चलांतील सहसंबंध असल्यामुळे त्याचा फक्त r असा उल्लेख न करता r_{xy} किंवा r_{12} असाही करतात. त्याची किंमत ०.९८ इतकी झाली. **(ह्याचा अर्थ हा जवळपास आदर्श असा धन सहसंबंध आहे. म्हणजे ज्याची गणितातही प्रगती चांगली त्याची विज्ञानातही प्रगती चांगली आहे तर विज्ञानात कच्चा असलेला गणितातसुद्धा कच्चाच आहे.)**

स्पिअरमन p प्रमाणेच r चे वितरण -१ ते +१ या दरम्यानच असते. p चा अन्वयार्थ लावण्यासाठी तयार करण्यात आलेले कोष्टकच r चा अर्थ लावण्यासाठी वापरले जाते. म्हणून r_{xy} = 0.90 असल्यास X आणि Y या दोन चलांतील सहसंबंध हा जवळपास आदर्श किंवा नमुनेदार असा पूर्णात्मक धन सहसंबंध असतो. म्हणजे X चलातील गुणांकाशी Y चलातील गुणांक समप्रमाणात बदलणारे आहेत. म्हणून गटातील व्यक्तींची X चलात प्रगती असेल तर Y चलात हमखास प्रगती आढळून येते. Y चलात अधोगती असेल तर X चलातसुद्धा अधोगतीच आढळून येते. p चा अन्वयार्थ लावण्यासाठी वापरात असलेले कोष्टकच r चा अन्वयार्थ लावण्यासाठी संशोधकाने वापरायचे असते आणि आपले निष्कर्ष मांडायचे असतात.

मानसशास्त्रीय कसोट्यांच्या मदतीने संशोधन करताना सहसंबंध गुणकाचा खूपच उपयोग होतो. व्यक्तिमत्त्व गुणातील परस्परसंबंध शोधून काढला तर त्याच्या मदतीने r चा समावेश असलेले दोन चलांच्या परस्परसंबंधाचे समीकरणसुद्धा तयार करता येते. त्यांना परागमन समीकरणे (Regression Equations) असे म्हणतात. परिणामी दोन चलांतील सहसंबंध माहीत असेल आणि एका चलाची किंमत माहीत असेल तर दुसऱ्या चलांची किंमत, प्रत्यक्ष मोजदाद न करता, केवळ आकडेमोडीनेसुद्धा काढता येते ह्यालाच संख्याशास्त्राच्या मदतीने भाकित (Prediction) करणे असे म्हणतात. उदाहरणार्थ, विद्यार्थ्यांची बुद्धिमत्ता आणि परीक्षेतील प्रावीण्य यांचा सहसंबंध काढता येतो. यावरून विशिष्ट बुद्धिमत्तेसाठी विद्यार्थ्यांचे परीक्षेतील प्रावीण्य किती ? किंवा परीक्षेतील प्रावीण्यावरून त्या विद्यार्थ्यांची बुद्धिमत्ता किती असू शकेल ? हे आकडेमोडीनेदेखील काढता येते. याचा उपयोग विद्यार्थ्यांच्या प्रगतीची कारणे, प्रगतीसाठी उपाय, अधोगतीची कारणे, त्यावरील उपाययोजना यासंबंधी संशोधन करता येते. **संशोधनामध्ये पिअरसन (r) चा उपयोग नैदानिक कारणासाठी व त्याचप्रमाणे उपचारात्मक अध्यापनासाठीसुद्धा करता येतो.** पिअरसन सहसंबंधामध्ये प्रत्येक गुणांकाचा स्वतंत्रपणे विचार केला **जातो म्हणून ही परिमितीय चाचणी आहे असे मानले जाते.**

अनेक न्यादर्शावरून एकत्रित निष्कर्ष काढण्यासाठी आपल्याला संयुक्त मध्यमान काढावे लागते. त्याचप्रमाणे अनेक न्यादर्शातील सहसंबंध शोधण्यासाठी संयुक्त / सरासरी सहसंबंध गुणांकही काढावा लागतो. त्याची सविस्तर चर्चा पुढे केलेली आहे.

८.३ सरासरी सहसंबंध गुणांक काढण्यासाठी फिशर Z चा वापर (Averaging r by Fisher's Z function)

पिअरसन r हा अतिशय वैध आणि विश्वसनीय सहसबंध आहे. परंतु एकाच गटाचे त्या दोन चलातील वेगवेगळ्या वेळी काढलेले सहसंबंध गुणक तंतोतंत एकसारखे येत नाहीत. तसेच एकाच जनसंख्येतून समतुल्य गट निवडले आणि सर्वांसाठी समान असलेल्या दोन चलांतील सहसंबंध गुणक काढले तर सर्व गटासाठी r ची किंमत तंतोतंत एकसारखी येत नाही: त्यामध्ये कमी-जास्त विचलन झालेले आढळते. मग कोणत्या r ची किंमत प्रमाण मानायची ?

संशोधनासाठी संपूर्ण जनसंख्येचे मोजमाप केले जात नाही. संपूर्ण जनसंख्येसाठी जी निरपेक्ष मापने असतात त्यामध्ये विचलन कधीच नसते. त्यांना प्रमाणके वा प्रमाणनित्यके (Parameters) असे म्हणतात. परंतु संपूर्ण जनसंख्येची मोजदाद केल्याशिवाय ही प्रमाणके काढता येत नाहीत आणि ते मानवी प्रयत्नाने अशक्य आहे. परिणामी दोन चलांतील r ची किंमत ठरवितानासुद्धा परिणामी न्यादर्शाची मापने म्हणजेच सांख्यिकी हे जनसंख्येच्या सत्य मापनाच्या जितक्या जवळात जवळ नेण्याचा प्रयत्न करता येईल तेवढा करावयाचा असतो. म्हणून प्रमाणक r ची किंमत काढण्यासाठी पुढील २ पद्धतींचा वापर करता येऊ शकतो.

(१) एकाच न्यादर्शासाठी वेळोवेळी आलेल्या दोन समान चलांमधील पिअरसन (r)ची सरासरी काढणे आणि,

(२) एकाच जनसंख्येतील समतुल्य गटातील दोन समान चलांसाठी आलेल्या वेगवेगळ्या पिअरसन (r)ची सरासरी काढणे. पण येथे पदोपदी येणारी अडचण म्हणजे -

पिअरसन (r)चे वितरण हे कधीच एका सरळ रेषेत नसते तर ते वेड्यावाकड्या रेषेत असते. म्हणून पिअरसन r ची नेहमीच्या पद्धतीने सरळ सरळ सरासरी काढता येत नाही. यासाठी एमिल फिशर यांनी शोधून काढलेल्या Z function ह्या संकल्पनेचा (सहसंबंध गुणकाचा) वापर करतात. कारण

★ Z function चे वितरण हे नेहमी सरळ रेषेत असते.

★ Z function ची किंमत $\pm$१ पेक्षा कमी किंवा जास्त असू शकते.

संशोधनामध्ये दोन चलांतील सहसंबंध शोधण्यासाठी एकाच न्यादर्शावर अनेक वेळा प्रयोग केले जातात आणि पिअरसन सहसंबंध काढला जातो. तो प्रत्येक वेळेला सारखा येत नाही. म्हणून पुढील पद्धतीने पिअरसन सहसंबंधाची सरासरी काढली जाते.

(१) पिअरसन (r) फिशर Z मध्ये रूपांतरीत करण्यास कोष्टकावरून प्रत्येक पिअरसन (r) चे फिशर Z मध्ये रूपांतर केले जाते. हे कोष्टक परिशिष्ट - १ मध्ये देण्यात आलेले आहे.

(२) सर्व Z functions ची बेरीज करून त्याची सरासरी काढली जाते.

(३) वरील कोष्टकावरून उलट्या पद्धतीने (Interpolatation) सरासरी Z function च्या किंमतीचे पिअरसन (r) मध्ये रूपांतर केले जाते. हाच पिअरसन सरासरी सहसंबंध (Average r) होय.

हे आपण एका उदाहरणाने समजावून घेण्याचा प्रयत्न करू.

लोकांचे राहणीमान आणि त्यांचे उत्पन्न यांच्यातील सहसंबंध शोधण्यासाठी संशोधकाला लोकांच्या उत्पन्नाचे पाच स्तर करावे लागतील आणि प्रत्येक स्तरातील १०% न्यादर्शाची निवड त्याने केली. त्यामुळे त्याच्या न्यादर्शाच्या आकारातही फरक होता. परिणामी त्याला वरीलप्रमाणे पिअरसन (r) चे फिशर Z function मध्ये रूपांतर करता आले नाही. त्याचा प्रत्येक गटातील पिअरसन r आणि गटाचा आकार पुढीलप्रमाणे होता.

पिअरसन (r)	*गटाचा आकार (व्यक्तींची संख्या)* (N)
०.५०	३३
०.९०	२७
०.४०	६३
०.३०	७४
०.७०	२६
एकूण $\sum N$ = २२३	

तर राहणीमान आणि उत्पन्न ह्यांचा सहसंबंध किती ?

★ त्याने प्रथम कोष्टकाच्या पिअरसन (r) वरून Z function ची किंमत ठरविली. ह्यासाठी प्रत्येक वेळी न्यादर्शातील स्वाधीनता मात्रा (d*f*) चा विचार करावा लागतो. स्वाधीनता मात्रा ही संकल्पना प्रगत सांख्यिकीमध्ये स्पष्ट केलेली आहे.

★ मध्यमान, विचलन आणि पिअरसन (r) काढल्यामुळे न्यादर्शातील तीन स्वाधीनता कमी झाल्यामुळे प्रत्येक न्यादर्शाची d*f* ची किंमत (N-३) काढली व त्याची सरासरी काढली.

★ प्रत्येक N-३ ला Z function ने गुणले व त्याची सरासरी काढली.

हे कोष्टक पुढीलप्रमाणे तयार झाले.

r	*N*	*Z*	*N-३*	*Z(N-३)*
.५०	३३	०.५५	३०	१६.५०
.९०	२७	१.४७	२४	३५.२८
.४०	६३	.४२	६०	२५.२०
.३०	७४	.३१	७१	२२.०१
.७०	२६	.८७	२३	२०.०१
			$\sum$(N-३)	$\sum$Z(N-३)
$\sum$N=	२२३		२०८	११९.००

कोष्टक १७ : पिअरसन (r) चे फिशर Z मध्ये रूपांतर

$$\text{सरासरी Z function} = \frac{\sum Z(N-३)}{\sum (N-३)}$$

$$= \frac{११९.००}{२०८} = ०.५७$$

कोष्टकावरून Z ची किंमत जेव्हा ०.५७ असते तेव्हा समतुल्य पिअरसन (r) ची किंमत ०.५१ असते. यावरून असे म्हणता येईल की, लोकांचे राहणीमान आणि त्यांचे उत्पन्न यांच्यातील सरासरी सहसंबंध ०.५१ आहे. तो मध्यम दर्जाचा धन सहसंबंध आहे. त्यामुळे उत्पन्नाच्या प्रमाणात राहणीमान समप्रमाणात असते असे आपणांस म्हणता येईल. पिअरसन (r) चे फिशर Z रूपांतर तक्ता परिशिष्ट क्र. १ मध्ये दिलेले आहे.

सरावासाठी स्वाध्याय

एका संशोधकाने गणित आणि विज्ञानात सहसंबंध आहे का ? हे पाहण्यासाठी बारा विद्यार्थ्यांची निवड केली. त्यांना गणित आणि विज्ञान विद्यार्थ्यांच्या चाचणीत मिळालेले गुण पुढीलप्रमाणे होते. या दोन विषय चाचण्यांमधील पिअरसन सहसंबंध काढा.

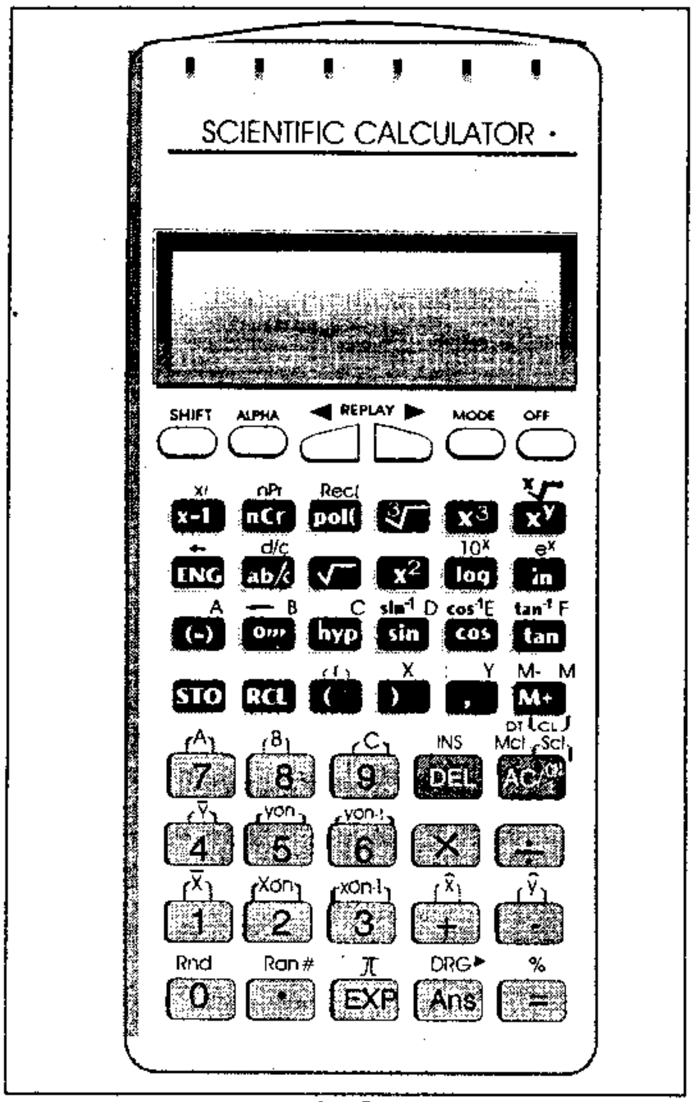
विद्यार्थी	*गणित गुण*	*विज्ञान गुण*
क	५०	२२
ख	५४	२५
ग	५६	३४
घ	५९	२८
च	६०	२६
छ	६२	३०
ज	६१	३२
झ	६५	३०
ट	६७	२८
ठ	७१	३४
ड	७१	३६
ढ	७४	४०

आतापर्यंत आपण मूलभूत सांख्यिकीचा अभ्यास केला. परंतु या सांख्यिकीच्या साहाय्याने तुमच्या संशोधनातील परिकल्पनांचा स्वीकार किंवा नकार ठरविता येत नाही. ते ठरविण्यासाठी प्रगत सांख्यिकीचाच वापर करावा लागतो. या पुस्तकात सुरुवातीला प्रगत सांख्यिकीला आवश्यक असणारी सांख्यिकीची माहिती दिलेली आहे. मूलभूत सांख्यिकीबाबतची इतर अनुषंगिक माहिती तुम्हांला संख्याशास्त्राच्या संदर्भ पुस्तकातून मिळू शकेल.

सांख्यिकी विश्लेषणासाठी आपल्याला गणक यंत्राचा वापर करता येतो त्याबाबतची माहिती आता समजावून घेऊ.

९.० सांख्यिकी विश्लेषणासाठी वैज्ञानिक गणक यंत्राचा वापर

साध्या गणक यंत्रामध्ये आपल्याला फक्त +, -, ×, ÷, % अशा मूलभूत क्रिया करता येतात. परंतु वैज्ञानिक गणक यंत्र हे तीन वेगवेगळ्या प्रकारच्या हेतूंसाठी वापरले जाते. ते असे सांख्यिकी विश्लेषण, इंजिनीअरिंगमधील विविध कार्य, वैज्ञानिक आकडेमोड. एकाच गणक यंत्रामध्ये ही सर्व कार्ये करण्यासाठी प्रत्येक बटणाद्वारे तीन ते चार कार्ये केली जातात. हे गणक यंत्र कसे दिसते ते आपण पुढील आकृतीवरून पाहू.



आकृती ११ : वैज्ञानिक गणक यंत्र

गणक यंत्राच्या स्क्रिनच्या खाली एकूण ५ बटणे आहेत. तुमच्याकडे असलेले वैज्ञानिक गणक यंत्रही समोर ठेवा. त्यातील-

(१) पहिल्या बटणाच्या वर Shift असे पिवळ्या रंगात लिहिलेले आहे.

(२) दोन क्रमांकाच्या बटणाच्या वर Alpha असे लाल रंगात लिहिलेले आहे. तर उर्वरित तीन बटणांच्या वर पांढऱ्या अक्षरात त्यांचे कार्य लिहिलेले आहे.

या पाच बटणांच्या खाली काळ्या रंगात एकूण २४ (६ × ४) बटणे आयताकृतीत आहेत. प्रत्येक बटणावर पांढऱ्या अक्षरात त्याचे कार्य लिहिलेले आहे. प्रत्येक बटणाच्या वर पिवळ्या / लाल अक्षरात त्या बटणाद्वारे करता येतील अशी अन्य कार्ये लिहिलेली आहेत.

★ तुम्हांला बटणावरील पिवळे कार्य हवे असल्यास Shift चे बटण दाबून त्यानंतर संबंधित कार्यासाठी ते बटण दाबावे.

★ तुम्हांला लाल कार्य हवे असल्यास Alpha चे बटण दाबून त्यानंतर संबंधित कार्याचे बटण दाबावे.

गणक यंत्राच्या खालील अर्ध्या भागात राखाडी रंगात पाच स्तंभात आणि चार ओळीत एकूण वीस बटण आहेत. त्या प्रत्येक बटणावर त्याचे मूळ कार्य पांढऱ्या रंगात लिहिलेले आहे तर बटणाच्या वर पिवळ्या रंगात Shift दाबल्यानंतर करावयाचे कार्य दिलेले आहे. या वीस बटणांपैकी जी दोन लाल बटणे आहेत त्यातील एक बटण गणक यंत्र सुरू करण्यासाठी आहे तर दुसरे बटण तुम्ही गणक यंत्रात टाकलेली माहिती चुकीची असल्यास काढण्यासाठी आहे. म्हणजेच माणसाला अनेकविध प्रकारची आकडेमोड करण्यासाठी गणक यंत्राची मदत होते. म्हणूनच तो आपला मित्र ठरतो.

गणक यंत्राला एकाच वेळेला ९ वेगवेगळी कामे करता येतात. व ती वेगवेगळ्या प्रोग्रॅम्सद्वारे शक्य होतात.

आपल्याला अपेक्षित कार्य करण्यासाठी प्रथम प्रोग्रॅम निश्चिती करावा लागतो.

आता आपण हे गणक यंत्र कसे वापरावयाचे ते प्रथम समजावून घेऊ. डाव्या बाजूला कृती आणि उजव्या बाजूला स्क्रीनवरील दृश्य दिलेले आहे.

कृती			*स्क्रीनवरील दृश्य*
(१) प्रथम AC/ON चे बटण दाबा.			O
(स्क्रीनवर शून्य व छोटा D दिसेल.)		D	
	COMP	SD	REG
(२) (अ) Mode चे बटण दाबा.	१	२	३
(आ) पुन्हा Mode चे बटण दाबा.	Deg	Rad	Gra
	१	२	३
(इ) पुन्हा Mode चे बटण दाबा.	Fix	Sci	Norm
	१	२	३

यावरून गणक यंत्रांच्या साहाय्याने नऊ प्रकारच्या कृती तुम्हांला करता येतात हे समजू शकेल.

COMP SD REG
१ २ ३

या मोडमध्ये आपल्याला नेहमीची आकडेमोड करता येते.

(१) Comp मध्ये आपल्याला +, -, ×, ÷ करता येतो.
१

(२) SD च्या वापराने आपल्याला मध्यमान आणि प्रमाणविचलन ही सांख्यिकी मापने मिळतात.
२

(३) REG च्या वापराने आपल्याला सहसंबंध गुणांक मिळतो. व हे तीन प्रकार आपल्या दृष्टीने महत्त्वाचे आहेत.

या गणकयंत्राचा वापर फक्त सांख्यिकी विश्लेषणासाठी कसा करावा हे आपण पाहणार आहोत. गणकयंत्राच्या साहाय्याने सांख्यिकी विश्लेषण करण्यासाठी प्रथम पुढील कृती करा.

(१) तुमच्या संशोधनातून मिळालेली माहिती (Data) निश्चित करा.

(२) ती एकाखाली एक अशी लिहून काढा.

(३) संशोधनासाठी निवडलेल्या गटातील व्यक्तीची संख्या (न्यादर्श) ३० पेक्षा कमी असेल तर तो छोटा न्यादर्श होईल आणि तो ३० पेक्षा जास्त असेल तर तो मोठा न्यादर्श होईल. परंतु हाही एक ठोकताळाच आहे. त्यामुळे तुमचा न्यादर्श १०० पेक्षा कमी असेल तर तो छोटा न्यादर्श आहे असे मानणेच योग्य ठरेल व अचूक उत्तर मिळू शकेल.

(४) संशोधनासाठी वापरलेल्या चाचण्या ह्या वेगवेगळ्या गुणांच्या असतात जर तुमची चाचणी १० पैकी असेल म्हणजेच गुणांक विस्तार कमी असेल तर सारखा गुणांक मिळविणारे एकापेक्षा जास्त विद्यार्थी असू शकतात. जर तुमची चाचणी १०० गुणांची असेल म्हणजेच गुणांक विस्तार जास्त असेल तर समान गुण मिळविणाऱ्या विद्यार्थ्यांची संख्या कमी असते. समान गुण मिळविणाऱ्या विद्यार्थ्यांची नोंद करा.

आता तुमच्याकडे संशोधनातून मिळालेली माहिती आहे या माहितीचे मध्यमान आणि प्रमाण विचलन गणक यंत्राच्या साहाय्याने कसे काढावे ते आता पाहू.

तुम्हांला गणक यंत्र वापराचा सराव व्हावा उत्तरात अचूकता यावी म्हणून पुढे एक छोटे उदाहरण घेतलेले आहे या माहितीवरून मध्यमान व प्रमाण विचलन कसे काढावयाचे ते आपण प्रथम समजावून घेऊ.

माहिती गुण - ५५, ५४, ५१, ५५, ५३, ५३, ५४, ५२

प्रत्यक्ष गणक यंत्रावरील कृती	*स्क्रीनवरील दृश्य*		
(१) गणक यंत्र सुरू करा.			O
	M	SD	D
(२) Mode चे बटण दाबा.	COMP	SD	REG
	१	२	३
(३) SD खाली लिहिलेला अंक दाबा.			O
२	M	SD	D
(४) गणक यंत्रातील अगोदरची सांख्यिकी	Scl		
आकडेमोड काढून टाकण्यासाठी			O
Shift Scl = असे तीन बटण क्रमाने	M	SD	D
दाबा. (गणक यंत्रावरील आकडेमोड निघून जाईल.)			
(५) गणक यंत्रात ५५ गुण येण्यासाठी दोन वेळेला ५ दाबा. टाका त्यानंतर DT हे बटण दाबा. (DT - Data Entry) DT चे कार्य M+ या बटणावर होते.			
(६) क्रमाक्रमाने प्रत्येक अंक गणक यंत्रात टाका प्रत्येक अंकानंतर DT चे बटण दाबा. शेवटचा ५२ अंक दाबल्यानंतरही DT चे बटण दाबा.			

तुम्ही वरील संपूर्ण माहिती गणक यंत्रात टाकलेली आहे. या माहितीवरून तुम्हांला नमुना मध्यमान, प्रमाणविचलन, गुणांकाची बेरीज, गुणांकाच्या वर्गाची बेरीज, न्यादर्शाचे प्रमाणविचलन (न्यादर्श तीसपेक्षा लहान असल्यास) जनसंख्येचे प्रमाणविचलनही मिळू शकते. त्यासाठी तुम्हांला पुन्हा वेगवेगळ्या कृती कराव्या लागतील. कृती करण्यासाठी कोणते बटण दाबावे आणि स्क्रिनवरील दृश्य काय असेल ते पुढे थोडक्यात दिलेले आहे त्याचा सराव करा.

कोणतीही कृती करण्याअगोदर स्क्रीन क्लिअर करण्यासाठी Shift, SCL, = ही बटणे दाबणे आवश्यक आहे.

अपेक्षित कृती	*कार्य बटण*	*स्क्रीनवरील दृश्य*	
(१) गुणांकाची संख्या Number of Data (n)	RCL C =	n	८
(२) मध्यमान (Arithemetic Mean)	Shift $\overline{X}$ =	X	५३.३७५
(३) गुणांकाची बेरीज sum of values	RCL B =	ΣX	४२७
(४) गुणांकाच्या वर्गाची बेरीज ΣX^2 (sum of squares of values)	RCL A =	ΣX^2	२२८०५
(५) न्यादर्शाचे प्रमाण विचलन σn-1 Sample Standard Deviation	Shift σn-1 =	x σ n-1	१.४० ७८८
(६) जनसंख्येचे प्रमाण विचलन σn Population Standard Deviation	Shift σn =	x σ n	१.३१६९५

सरावासाठी स्वाध्याय

तुमची उत्तरे वरील उत्तरांशी जुळली असल्यास पुढे काही माहिती (Data) दिलेली आहे त्याचे मध्यमान, गुणांकाची संख्या, प्रमाणविचलन काढा. न्यादर्शाचे प्रमाणविचलन आणि जनसंख्येचे प्रमाणविचलन काढा. ७, ८, ८, ८, ८, ९, ९, १०, १०, १०.

(१) गुणांकाची संख्या =

(२) मध्यमान =

(३) न्यादर्शाचे प्रमाणविचलन =

(४) जनसंख्येचे प्रमाणविचलन =

उत्तरसूची

१ $\longrightarrow$ n = १०

२ $\longrightarrow$ m = ८.७

३ $\longrightarrow$ σ × n-1 = १.०५९३

४ $\longrightarrow$ σ × n = १.००४

तुमची वरील दोन्ही उदाहरणांची उत्तरे बरोबर येत असल्यास संशोधनातून मिळालेल्या माहितीचे विश्लेषण करण्यासाठी सुरुवात करा.

एकच गुणांक एकापेक्षा जास्त वेळा आलेला असल्यास प्रत्येक वेळेला तो गुणांक न दाबता एकदा तो गुणांक दाबून त्यानंतर तेवढ्या संख्येने DT दाबल्यास ती संख्या तेवढ्या वेळेला घेतली जाते.

तुम्ही सराव केलेल्या वरील उदाहरणात ८ गुणांक ४ वेळा आलेला होता. म्हणून गणक यंत्रात तो टाकताना

८DT, ८DT, ८DT, ८DT या पद्धतीने किंवा,

८DT, DT, DT, DT किंवा,

८Shift; ४DT अशा पद्धतीनेही टाकू शकाल.

प्रमाण विचलन काढण्यासाठी आपण मूलभूत सांख्यिकीमध्ये आकडेमोडीसाठी सोपे व्हावे म्हणून आपण गृहीत मध्यमान / स्वेच्छित मध्यमान हीच पद्धती अभ्यासलेली आहे. तिचाच वापर आपण पुढे प्रमाण विचलनासाठीही केला आहे. परंतु प्रमाण विचलन काढण्याच्या इतर पद्धतींमध्ये आपल्याला मध्यमान (Arithmetic mean $\overline{X}$) गुणांकाच्या वर्गाची बेरीज (Sum of squares of values $\sum X^2$) न्यादर्शाचे प्रमाण विचलन (Sample standard deviation σ n-1) जनसंख्येचे प्रमाण विचलन (Population Standard Deviation σn) विद्यार्थी संख्या ३० पेक्षा जास्त असल्यास काढता येते. हे सर्व कार्य गणक यंत्राच्या साहाय्याने तुम्हांला करता येईल.

जशी आपण मध्यपान, प्रमाण विचलन आणि त्यासंबंधी लागणारी संपूर्ण आकडेमोड गणक यंत्राच्या साहाय्याने केली. तसेच दोन घटकांमधील पिअरसन सहसंबंधही (r) गणक यंत्राच्या साहाय्याने काढता येतो. ती पद्धती आता आपण समजावून घेऊ.

(१) प्रथम संशोधनातून मिळालेल्या माहितीचे पुढीलप्रमाणे कोष्टक तयार करा.

विद्यार्थी क्रमांक	विषय १ मिळालेले गुण	विषय २ मिळालेले गुण
१	१०	१०
२	१२	२२
३	१३	२५
४	१५	२७
५	१७	२९
६	२०	३०
७	२५	३७

प्रत्यक्ष गणकयंत्रावरील कृती	*स्क्रीनवरील दृश्य*		
(१) गणकयंत्र सुरू करा.			O
	M	SD	D
(२) Mode चे बटण दाबा.	Comp	SD	REG
	१	२	३
(३) REG खाली लिहिलेला अंक दाबा. ३	M	Reg	D
(४) त्यानंतर स्क्रिनवर असे दिसले	Lin	Log	Exp
त्यानंतर Lin (१) चा आकडा दाबा.	१	२	३
(५) गणक यंत्रातील अगोदरची सांख्यिकीय		Scl	O
आकडेमोड काढून टाकण्यासाठी Shift Scl = असे तीन बटण क्रमाने दाबा. (गणक यंत्रावरील आकडेमोड निघून जाईल.	M	Reg	D
(६) तुमच्या स्क्रिनवर पुढीलप्रमाणे माहिती	Scl		O
दिसेल		REG	D

(५) पुढील पद्धतीने आकडे गणक यंत्रात टाका

१०	$\boxed{,}$	१९	$\boxed{DT}$	१२	$\boxed{,}$	२२	$\boxed{DT}$
१३	$\boxed{,}$	२५	$\boxed{DT}$	१५	$\boxed{,}$	२७	$\boxed{DT}$
१७	$\boxed{,}$	२९	$\boxed{DT}$	२०	$\boxed{,}$	३०	$\boxed{DT}$
२५	$\boxed{,}$	३७	$\boxed{DT}$				

शेवटचा अंक टाकल्यानंतर	Reg
(६) सहसंबंध गुणांक काढण्यासाठी Shift r = असे तीन बटण क्रमाने दाबा.	r = 0.98

सरावासाठी स्वाध्याय

तपमान आणि दाब यांच्यातील सहसंबंध शोधण्यासाठी पुढे काही माहिती दिलेली आहे. त्यावरून तपमान आणि यातील सहसंबंध काढा.

तपमान	*दाब*
१०°c	१००३
१५°c	१००५
२०°c	१०१०
२५°c	१०११
३०°c	१०१४

उत्तरसूची

तपमान आणि दाब यातील सहसंबंध ०.९८२६

१०.० सारांश

गणित हा विषय नैसर्गिक घटनांवर आधारित नसून मानवनिर्मित आहे. तो मानवी जीवनात अत्यंत महत्त्वाची भूमिका बजावतो. गणित शाखेचा जसजसा विकास होत गेला तसतशा अनेक उपशाखा उदयास आल्या. त्यातील संख्याशास्त्र ही एक उपशाखा १८ व्या शतकाच्या अखेरीस उदयास आली. पद्धतशीरपणे सांख्यिकीय आधारसामग्री गोळा करून ती कोष्टकरूपात, सारांशरूपाने मांडणे आणि तिचा अन्वयार्थ लावणे अशा बाबींशी संबंधित असलेल्या गणिती शाखेला संख्याशास्त्र असे म्हणतात. संख्याशास्त्रामुळे माहितीची अचूकपणे मांडणी, विचारात सुस्पष्टता येते. अर्थपूर्ण व योग्य पद्धतीने निष्कर्ष मांडून त्याची सत्यता व विश्वसनीयता पडताळता येते. प्रत्येक क्षेत्रामध्ये संख्याशास्त्र उपयुक्त आहे. प्राथमिक अंकगणित आणि बीजगणित येणाऱ्या प्रत्येक व्यक्तीला संख्याशास्त्राचा वापर करता येतो. वर्णनात्मक सांख्यिकी आणि अनुमानात्मक सांख्यिकी आणि भाकितात्मक सांख्यिकी काढता येते. वर्णनात्मक सांख्यिकीमध्ये संख्यात्मक माहितीचे कोष्टकरूपात, आकृतीस्वरूपात आलेखात्मक रूपांतर केले जाते. या रूपांतरित माहितीवर केंद्रीय प्रवृत्ती, विचलन, शततमक, सहसंबंध अशा मूलभूत सांख्यिकी मापनांची माहिती तयार केली जाते. वर्णनात्मक सांख्यिकीमुळे अनुमानात्मक आणि पूर्वकथनात्मक सांख्यिकीच्या अभ्यासाचा पाया तयार होतो. संशोधकाने न्यादर्शाच्या आधारे काढलेले जनसंख्येच्याबाबतचे निष्कर्ष ही अनुमाने असतात, हे निष्कर्ष सापेक्ष असतात. अनुमानात्मक सांख्यिकीमध्ये न्यादर्श, विभाजन, विविध मापनाच्या प्रमाणत्रुटी, संभाव्यता, इत्यादींच्या आधारे परिकल्पनांचे परीक्षण केले जाते. भाकितात्मक सांख्यिकीमध्ये प्राप्त परिस्थितीचे विश्लेषण करून भविष्यकालीन गोष्टींविषयी अंदाज मांडले जातात. ही सर्व सांख्यिकी तंत्रे वापरण्यासाठी आधारसामग्रीचा वापर करावा लागतो. आधारसामग्री ही नामांकन, क्रमांकन, अंतर किंवा गुणोत्तर श्रेणीतील असते. या श्रेणीनुसार निष्कर्ष काढण्यासाठी विविध सांख्यिकी तंत्रांचा वापर संशोधकाला करावा लागतो. आधारसामग्री ही खंडित किंवा अखंडित श्रेणीतील असते. सांख्यिकीय माहिती सुट्या प्राप्तांकाच्या स्वरूपात असते. पुढील सांख्यिकीय तंत्र वापरण्यास सुकर व्हावे म्हणून या माहितीचे वर्गीकरण केले जाते. हे वर्गीकरण केल्यानंतर विविध सांख्यिकी तंत्रांचा वापर करून पुढील निष्कर्ष काढले जातात. समूहाच्या प्रातिनिधिक गुणांक काढणे म्हणजेच केंद्रीय प्रवृत्ती काढणे होय. केंद्रीय प्रवृत्ती काढण्याचे बहुलक, मध्यांक आणि मध्यमान अशा तीन पद्धती आहेत. या प्रत्येक पद्धतीचा वापर वेगवेगळ्या वेळेस केला जातो. संशोधनामध्ये प्रामुख्याने मध्यमान या पद्धतीचाच वापर सर्वात जास्त वेळा केला जातो. संशोधनामध्ये अनेक गटांचा वापर केला असेल तर संयुक्त मध्यमानही काढता येते. केंद्रीय प्रवृत्तीवरून गटाचा प्रातिनिधिक गुणांक काढला असता तरी प्रत्येक गुणांक हा मध्यमानापासून वेगवेगळ्या अंतरावर असतो. या अंतरावरून तो गट एकजिनसी की बहुजिनसी आहे ते ठरविता येते.

त्यासाठी विस्तार, चतुर्थक विचलन, सरासरी विचलन आणि प्रमाण विचलन या सांख्यिकी तंत्राचा वापर केला जातो. प्रमाण विचलन हे अत्यंत विश्वसनीय आणि उपयुक्त मापन असल्यामुळे संशोधनात प्रामुख्याने त्याचाच वापर केला जातो. संशोधनासाठी अनेक गटांचा वापर केलेला असेल तर संशोधकाला संयुक्त प्रमाण विचलनही काढता येते. सांख्यिकी माहितीवरून संशोधकाला वेगवेगळे आलेखही काढता येतात. त्यातील वारंवारिता बहुभुज आणि स्तंभालेखाचा वापर संशोधनात प्रामुख्याने करण्यात येतो. वारंवारिता बहुभुज सरलित करून त्याला मुक्तहस्तरेषेचे स्वरूप दिल्यानंतर मिळणारा वक्र हा प्रसामान्य विभाजन वक्राप्रमाणे येतो.

अनुमानात्मक सांख्यिकीमध्ये या वक्राच्या विविध गुणधर्मांचा वापर केला जातो. हा वक्र घंटाकृती, दोन्ही बाजूला निमुळता होत गेलेला असतो. या वक्राच्या कमाल बिंदूपाशी मध्यांक, मध्यमान आणि बहुलक एकाच ठिकाणी असतात. या बिंदूपासून 'क्ष' अक्षावर लंब टाकला असता तो दोन समान भाग करतो. मध्यमानापासून ३σ पर्यंतचे अंतर पुढील सांख्यिकी विश्लेषणासाठी वापरले जाते. न्यादर्श निवडीत दोष मापन साधननिर्मितीतील दोष, मापनाच्या प्रशासनातील व पर्यवेक्षणातील त्रुटी आणि मूल्यमापनातील त्रुटींमुळे प्रसामान्य संभव वक्रामध्ये विषमितता, शिखरदोष, स्थानांतरे, अनियमित वितरण असे दोष आढळतात. दोन घटकांमधील संबंध शोधण्यासाठी सहसंबंध गुणांक काढला जातो. हा गुणांक - १ ते + १ च्या दरम्यान असतो. हा सहसंबंध गुणक काढण्यासाठी स्पिरअमनचा (ρ) आणि पिअरसन (r) या सूत्रांचा वापर केला जातो. स्पिअरमनच्या पद्धतीमध्ये गुणांकांना गुणानुक्रम दिले जातात. प्रत्यक्ष गुणांकाच्या मूल्यांचा विचार केला जात नाही. त्यामुळे प्रमाणित सांख्यिकी काढण्यासाठी पिअरसन (r)चाच वापर केला जातो. पिअरसन (r)चे वितरण हे सरळ रेषेत नसते म्हणून त्याचे रूपांतर फिशरच्या z मध्ये केले जाते व सरासरी काढली जाते.

११.० पारिभाषिक शब्द

स्तंभालेख	-	Histogram, Column Diagram
उर्ध्वगामी वक्र	-	Ogive
वर्गांतर	-	Class Interval
मध्यमान	-	Mean
मध्यांक	-	Median
बहुलक	-	Mode
न्यादर्श	-	Sample
सहसंबंध	-	Correlation
भाकित, पूर्वकथन	-	Prediction
सप्रमाणता, वैधता	-	Validity
गुणात्मक संशोधन	-	Qualitative Research

संख्यात्मक संशोधन	-	Quantitative Research
आधारसामग्री	-	Data
आधारसामग्री संकलन	-	Collection of Data
संख्यात्मक माहिती	-	Quantitative Information
गुणात्मक माहिती	-	Qualitative Information
नामांकन श्रेणी	-	Nominal Scale
क्रमांकन श्रेणी	-	Ordinal Scale
अंतर श्रेणी	-	Interval Scale
गुणोत्तर श्रेणी	-	Ratio Scale
प्रमाणनित्यके	-	Parameter
परिमितीय चाचण्या	-	Parametric tests
अपरिमितीय चाचण्या	-	Non-Parametric tests
संपादणूक / उपलब्धी	-	Achievement
अभिवृत्ती / दृष्टिकोन	-	Attitude
अभिरूची	-	Interest
वारंवारिता विभाजन	-	Frequency Distribution
स्तंभ	-	Column
वर्णनात्मक विश्लेषण	-	Descriptive analysis
अनुमानात्मक विश्लेषण	-	Inferential Analysis
केंद्रीय प्रवृत्ती	-	Central Tendency
विचलन	-	Variability
चल	-	Variable
स्थिरांक	-	Constant
घटकात्मक अभिकल्प	-	Factorial Design
योगायोग	-	Chance
स्वाश्रयी चल	-	Independent Variable
आश्रयी चल	-	Dependent Variable
प्रमाण विचलन	-	Standard Deviation
प्रसामान्य	-	Normal
प्रसामान्य संभव वक्र	-	Normal Probability Curve
अंदाज त्रुटी	-	Error of estimate
अखंडित श्रेणी	-	Continuous Series

खंडित श्रेणी	-	Discontinuous Series
प्रायोगिक अभिकल्प	-	Experimental Design
श्रेणी क्रम / श्रेणी अंतर पद्धती	-	Rank Rule / Rank Difference Method

१२.० अधिक वाचनासाठी पुस्तके

(1) Broota, K. D., (1989), *'Experimental Design in Behavioural Research'*, New Delhi, Wiley Eastern Limited.

(2) Garrett, H. E. and Wood - Worth, R. S., (1981), *'Statistics in Psychology and Education'*, Bombay Vakils Felter and Simens Pvt. Ltd.

(3) Guilford J. P., (1965), *'Fundamental Statistics in Psychology and Education'*, 4th edn., New York, McGraw Hill book Co.

(4) उपासनी, ना. के., कुलकर्णी, के. वि., (१९८७), *'नवे शैक्षणिक मूल्यमापन आणि संख्याशास्त्र'*, पुणे, श्रीविद्या प्रकाशन.

(5) कदम, चा. प., (१९८९), *'शैक्षणिक संख्याशास्त्र'*, पुणे, नूतन प्रकाशन.

(6) पाटील, गी. ग., (१९९८), *'शैक्षणिक संख्याशास्त्र'*, नागपूर, श्री मंगेश प्रकाशन.

विभाग - २ : प्रगत सांख्यिकी

अनुक्रमणिका

१.० काही प्रश्न

तुम्ही विविध साधनांच्या साहाय्याने संशोधनाबाबतची आधारसामुग्री एकत्रित केलेली आहे. या

आधारसामुग्रीचे विश्लेषण करण्यासाठी तुमच्या मनात काही प्रश्न असतील. पुढेही काही प्रश्न दिलेले आहेत. त्यांच्याशी तुमच्या मनातील प्रश्न ताडून पहा. त्यातील कोणकोणत्या प्रश्नांची उत्तरे तुम्हांला देता येतात, ते ठरवा. उर्वरित प्रश्नांची उत्तरे या विभागातून मिळवा.

(१) तुमच्या संशोधन कार्यातील स्वाश्रयी, आश्रयी आणि मध्यस्थ चले कोणती व किती आहेत ?

(२) संशोधन कार्यातून मिळालेली माहिती ही नामांकन, क्रमांकन, अंतर किंवा गुणोत्तर यांपैकी कोणत्या श्रेणीतील आहे ?

(३) संशोधनाच्या परिकल्पनांमधून कोणते सांख्यिकी तंत्र वापरता येईल ह्याचा अंदाज येतो का ?

(४) माहितीच्या विश्लेषणासाठी वर्णनात्मक की अनुमानात्मक सांख्यिकी तंत्राचा वापर तुम्ही करणार आहात ?

(५) विश्लेषणासाठी परिमितीय /अपरिमितीय यांपैकी कोणत्या चाचणीचा वापर करणार आहात.

ह्या प्रश्नांच्या संदर्भात तुम्ही ह्या विभागाचे वाचन करणार आहात व त्यातून तुम्हांला पुढील गोष्टी करता येऊ शकतील.

२.० तुम्ही काय मिळवाल ?

२.१ संशोधन आधारसामुग्री विश्लेषणासाठी आवश्यक संकल्पना स्पष्ट करता येतील.

२.२ संशोधनासाठी प्रसामान्य संभव वक्राचा उपयोग करता येईल.

२.३ सांख्यिकी माहितीचे विश्लेषण करण्यासाठी वापरल्या जाणाऱ्या चाचण्यांचे प्रकार स्पष्ट करता येतील.

२.४ संशोधनातून मिळालेल्या माहितीच्या आधारे योग्य सांख्यिकी तंत्राचा वापर करून परिकल्पनेचा पडताळा पाहता येईल.

२.५ संशोधनातून मिळालेल्या माहितीचे विश्लेषण करण्यासाठी विविध सांख्यिकी साधनांचा वापर करता येईल.

२.६ सांख्यिकी विश्लेषणासाठी संगणकीय संपुटाचा (Package) वापर करता येतो, हे स्पष्ट करता येईल.

३.० प्रास्ताविक

मूलभूत सांख्यिकीबाबतची माहिती तुम्ही अभ्यासलेली आहे. या सांख्यिकी परिमाणांचा वापर करून तुमच्या संशोधनातून मिळालेल्या आधारसामग्रीची सार्थकता आणि विश्वसनीयता ठरविण्यासाठी अनेक प्रगत सांख्यिकी तंत्राचा वापर करावा लागतो. हे सांख्यिकी तंत्र वापरण्यापूर्वी त्यात वापरल्या जाणाऱ्या आवश्यक संकल्पनाही तुम्हांला समजावून घ्याव्या लागतील. प्रसामान्य संभव वक्राचे मूलभूत गुणधर्मही आपण मूलभूत सांख्यिकीमध्ये अभ्यासले आहेत. संशोधनामध्येही प्रसामान्य संभव वक्राचा विविध पद्धतीने वापर केला जातो. उदाहरणार्थ, भाकित करणे, संभवनीयता

ठरविणे, प्रमाण नित्यके आणि सांख्यिकीमधील फरक. संशोधनासाठी मिळालेली आधारसामुग्री अंतर किंवा गुणोत्तर श्रेणी असेल तर तुम्हांला विश्लेषणासाठी परिमितीय चाचण्यांचा वापर करावा लागतो. आधारसामुग्री जर नामांकन किंवा क्रमांकन शलाकेतील असेल तर अपरिमितीय चाचण्यांचा वापर करावा लागतो. सांख्यिकीय विश्लेषण हाताने करण्यापेक्षा गणकयंत्र, संगणक अशा विविध साधनांचा वापर केल्यास ते अचूक कमीत कमी वेळात होते, ते कसे करावे, याबाबतची माहिती या विभागात दिलेली आहे.

४.० संशोधन आधारसामग्रीच्या विश्लेषणासाठी आवश्यक संकल्पना

प्रगत सांख्यिकीचा अभ्यास करण्याअगोदर तुमच्या संशोधनातून मिळालेली आधारसामग्री, संशोधनाची उद्दिष्टे आणि परिकल्पनाही समोर ठेवा आणि मग पुढील प्रश्नांची उत्तरे देण्याचा प्रयत्न करा.

(१) तुम्हांला दोन वैशिष्ट्यांमधील / दोन चलांमधील संबंध शोधावयाचा आहे का ?

(२) तुमची आधारसामग्री नामांकन, क्रमांकन, अंतर किंवा गुणोत्तर श्रेणी यांपैकी कोणत्या श्रेणीतील आहे ?

(३) तुम्ही आधारसामग्रीचे विश्लेषण करण्यासाठी वैज्ञानिक गणकयंत्र (Scientific Calculator), संगणकातील एक्सेल किंवा आधारसामुग्रीचे विश्लेषण करून देणारे स्वतंत्र मृदूसाहित्य (Software) - SPSS चा वापर करणार आहात काय ?

ह्या प्रश्नांच्या अनुषंगाने तुम्ही सांख्यिकीचा अभ्यास करणार आहात.

४.१ स्वाधीनता मात्रा (Degree of Freedom (d*f*))

प्रगत सांख्यिकीचा वापर करण्यापूर्वी आधारसामुग्रीच्या विश्लेषणासाठी आवश्यक संकल्पना, स्वाधीनता मात्रा, सार्थकता स्तर, विश्वासांतर, शून्य व दिशांकित परिकल्पना तुम्हांला माहीत असणे गरजेचे आहे. या संकल्पना पुढे थोडक्यात स्पष्ट केलेल्या आहेत. त्या व्यवस्थित समजावून घ्या.

सांख्यिकीमध्ये स्वाधीनता मात्रा ही एक महत्त्वपूर्ण संकल्पना आहे. जनसंख्या (Population) लोकसंख्येसाठी सांख्यिकी तयार करताना आपण नेहमी न्यादर्शाचाच वापर करतो. हे न्यादर्श आकाराने लहान-मोठे असतात. फार मोठे प्रातिनिधिक न्यादर्श असतील तर त्यापासून मिळणारे निष्कर्ष खूपच विश्वसनीय, वैध आणि जनसंख्येच्या मापनाशी जवळीक साधणारे असतात. पण एका संशोधकाच्या दृष्टीने फार मोठा न्यादर्श हाताळणे हे काम कठीण आणि बऱ्याच वेळा कुवतीबाहेरचे असते. म्हणून प्रयोग किंवा संशोधन करताना साधारणपणे मर्यादित संख्येचे छोटे न्यादर्श निवडले जातात. हे न्यादर्श संबंधित जनसंख्येचे खरेखुरे प्रतिनिधित्व करू शकतील का ? याविषयी नेहमीच शंका उपस्थित केल्या जातात. तसे ते केले जात नसेल तर या न्यादर्शाच्या बाबतीत काय स्क्वेअर, एफ गुणोत्तर, टी गुणोत्तर, प्रसरण विश्लेषण

(Analysis of Variance) इत्यादी पुढील सांख्यिकी प्रक्रिया करताना अडचणी उद्भवतात. या न्यादर्शावरून जी सांख्यिकी तयार केली जाते त्याआधारे लोकसंख्येची प्रमाणमापे, प्रमाणनित्यके (Parameter) ठरविताना स्वाधीनता मात्रा या संकल्पनेचा वापर केला जातो. त्यासाठी (d*f*) हे चिन्ह वापरले जाते. साधारणपणे असे समजले जाते की, न्यादर्शामध्ये जितक्या व्यक्ती आहेत तितकी स्वातंत्र्ये त्या गटाला उपलब्ध असतात. पण आपण जेव्हा त्या न्यादर्शासंबंधी संशोधन, प्रयोग किंवा मोजमाप करू लागतो तेव्हा वेगवेगळ्या प्रकारची सांख्यिकी काढण्याचा प्रयत्न चालू होतो. ती सांख्यिकी काढण्यासाठी शोधावी लागलेली व अगोदरच्या सांख्यिकीमुळे निश्चित केलेल्या त्या गटाच्या स्वातंत्र्यावर तेवढी बंधने येतात. परिणामी गटाला असणाऱ्या एकूण स्वातंत्र्यातून ती बंधने वजा केली असता शिल्लक उरलेल्या संख्येला त्या गटाची स्वाधीनता मात्रा असे म्हणतात. **स्वाधीनता मात्रा म्हणजे शिलकी स्वातंत्र्ये.** *प्रथम आपण एक सोपे उदाहरण घेऊ. समजा, आपल्याकडे तीन संख्या आहेत. त्याची बेरीज दहा येते. त्यातील पहिली संख्या १ आहे असे समजले तरी अन्य दोन संख्या ठरविण्याचे स्वातंत्र्य आपणांस आहे. पण दुसरी संख्या ३ आहे संगितले तर तिसरी संख्या ठरविण्याचे स्वातंत्र्य आपणांस नसते. म्हणजे (3-1) किंवा (N-1) इतकी स्वाधीनता मात्रा आपल्याकडे असते.*

सांख्यिकीच्या बाबतीत एखाद्या गटाचे मोजमाप झाल्यानंतर केंद्रीय प्रवृत्ती (मध्यमान, मध्यांक आणि भूयिष्टिक यांपैकी कोणतेही एक किंवा सर्व) शोधल्या की, गटाचे स्वातंत्र्य एकने कमी होते. कारण सरासरीच्या बाबतीत गटाला आता स्वातंत्र्य नाही. केंद्रीय प्रवृत्ती निश्चित केल्यामुळे df ची किंमत गटातील व्यक्ती संख्येपेक्षा एकने कमी होते. म्हणजेच $df = N-1$. केंद्रीय प्रवृत्तीनंतर आपण विचलनाचा विचार करतो. त्याचे कोणतेही एक किंवा सर्व मापने (विस्तार, चतुर्थक विचलन, मध्यमान विचलन वा प्रमाण विचलन) शोधले की गटावर विचलनाबाबत बंधन येते. परंतु विचलन काढण्यासाठी केंद्रीय प्रवृत्तीचे मापन करावेच लागते. म्हणजेच विचलन निश्चित केले की, केंद्रीय प्रवृत्तीचे एक आणि विचलनाचे एक अशी दोन स्वातंत्र्ये नष्ट होतात आणि या दोन निर्बंधामुळे df ची किंमत N-2 इतकी असते.

d*f* ची गरज ही प्राधान्याने लहान न्यादर्शाच्या बाबतीत असते. कारण आपल्याला न्यादर्श सांख्यिकीचे रूपांतर लोकसंख्या प्रमाण नित्यकामध्ये करावयाचे असते. तसेच लहान न्यादर्शाचे वितरण प्रसामान्य न येता चिपिट शिखरी वक्रासारखे येण्याची शक्यता अधिक असते. त्यावरून प्रमाणीकरण करता येणे अशक्य असते पण संशोधनात नाईलाजास्तव छोटे न्यादर्श कधी कधी वापरावे लागतात.

४.२ विश्वासांतर (Confidence - Interval)

आपण सांख्यिकीच्या मदतीने जेव्हा एखादे प्रमाण नित्यक (Norm) शोधून काढतो (उदाहरणार्थ, मध्यमान) तेव्हा १०० तील ९५ वेळा आपले उत्तर कमीत कमी किती आणि जास्तीत जास्त किती येऊ शकेल, हे आत्मविश्वासपूर्वक सांगता येणे गरजेचे असते. मापन अगदी काटेकोर व्हावे आणि उत्तरावरील विश्वास पूर्णपणे सार्थ ठरावा ह्यासाठी तर १०० तील ९९ वेळा आपले उत्तर कमीत कमी किती आणि जास्तीत जास्त किती हे सांगता येणे खूपच उपयुक्त ठरते. **अशाप्रकारे उत्तराची किमान व कमाल मर्यादा ज्या विश्वासाने**

आपण मांडू शकतो, तिला सांख्यिकीचे विश्वासांतर असे म्हणतात.

१०० तील ९५ वेळा उत्तराची किमान आणि कमाल मर्यादा = ०.९५ विश्वासांतर.

१०० तील ९९ वेळा उत्तराची किमान आणि कमाल मर्यादा = ०.९९ विश्वासांतर.

हे विश्वासांतर अगदी नगण्य किंवा दुर्लक्ष करण्याइतके असेल; (उदाहरणार्थ, किलोग्रॅममध्ये मोजताना मिलीग्रॅमची चूक, मीटरमध्ये मोजतानां मिलीमीटरची चूक) तर आपण शोधलेली सांख्यिकी ही जनसंख्येच्या प्रमाणनित्यकाच्या अगदी जवळपासची किंवा प्रमाणनित्यकच आहे असे सांगता येते. पण हे अंतर खूप मोठे असेल. (उदाहरणार्थ, किलोग्रॅममध्ये मोजताना किलोग्रॅमची चूक, मीटरमध्ये मोजताना मीटरची चूक) तर त्या ठिकाणी मात्र सांख्यिकीवरून जनसंख्येच्या प्रमाणनित्यकाचा अंदाज लावण्यास असमर्थ आहे, असे समजून निरुपयोगी म्हणून टाकून दिली जाते आणि नव्याने मापन करावे लागते.

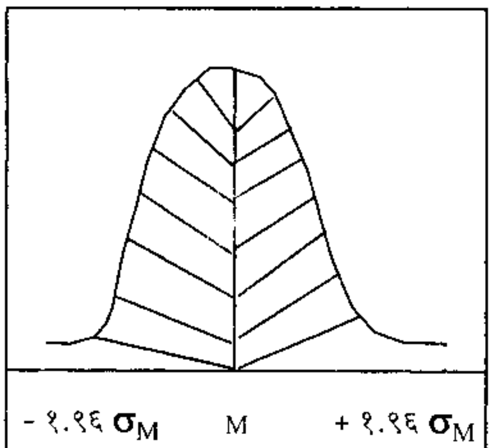
> आपण शोधलेल्या सांख्यिकी मापनाची वैधता आणि विश्वसनीयता अजमावण्यासाठी विश्वासांतर ही अतिशय उपयुक्त कार्यनीती आहे.

विश्वासांतर जेवढे कमी ($D \rightarrow 0$) तितके मापन हे जास्त वैध व विश्वसनीय तर विश्वासांतर जितके मोठे ($D \rightarrow \infty$) तेवढे मापन हे अधिकाधिक अविश्वसनीय आणि अवैध ठरते, त्या वेळी सांख्यिकी निरुपयोगी म्हणून टाकून दिली जाते. विश्वासांतर काढताना दोन सांख्यिकी गृहितकांचा वापर करावा लागतो.

ती अशी -

(१) आपण ज्या गुणांचे मोजमाप करतो त्याचे वितरण प्रसामान्य विभाजन वक्राप्रमाणे झालेले आहे असा संशोधकाला विश्वास असतो. वितरणाचा आलेख घंटाकृतीच येईल हे निश्चित असते.

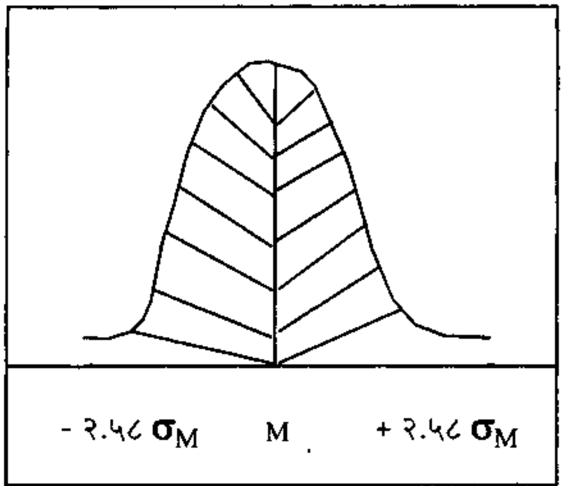
(२) प्रत्येक मापनाची प्रमाणत्रुटी काढून १०० तील ९५ वेळा आणि १०० तील ९९ वेळा ती किती असेल हे निश्चित करावे लागते.



आकृती १ : प्रसामान्य विभाजन वक्र

ज्याप्रमाणे प्रसामान्य विभाजन वक्रामध्ये गुणांकांची विभागणी मध्यमानाच्या वर ५०% खाली ५०% असते त्याप्रमाणे प्रमाणत्रुटीचे वितरणसुद्धा प्रसामान्य विभाजन वक्राप्रमाणेच असते. त्यामुळे ९५% क्षेत्रफळ व्यापण्यासाठी मध्यबिंदूच्या वर आणि खाली १.९६ प्रमाणत्रुटी इतके अंतर जावे लागते. M हे मध्यमान आणि σ_M ही मध्यमानाची प्रमाणत्रुटी असेल तर मध्यमानाचे ०.९५ विश्वासांतर हे M $\pm$ १.९६ σ_M असते.

म्हणजे मध्यमानाचे .९५ विश्वासांतर = M - १.९६·σ_M ते M + १.९६ σ_M ह्या मर्यादेतील गुणांक.



आकृती २ : प्रसामान्य विभाजन वक्र

जेव्हा यापेक्षाही अधिक क्रांतिक असे विश्वासांतर काढावयाचे असते तेव्हा प्रमाणकासाठी ०.९९ विश्वासांतर काढतात. म्हणजे त्यासाठी मध्यबिंदूच्या दोन्ही बाजूला समप्रमाणात प्रसामान्य विभाजन वक्राचे एकूण ९९% क्षेत्रफळ व्यापले गेले पाहिजे. हे क्षेत्रफळ व्यापण्यासाठी मध्यबिंदूच्या वर आणि खाली २.५८ प्रमाणत्रुटी इतके अंतर जावे लागते.

मध्यमानाचे ०.९९ विश्वासांतर = M $\pm$ २.५८ σ_M होय.

म्हणजेच = M - २.५८ σ_M ते M + २.५८ σ_M ह्या मर्यादेतील गुणांक.

४.३ सार्थकता स्तर (Levels of Significance)

संशोधनातून मिळालेल्या सांख्यिकीचे रूपांतर लोकसंख्येच्या प्रमाण नित्यकासाठी करताना सांख्यिकीमध्ये येणारी प्रमाणत्रुटी विचारात घ्यावी लागते, हे आपण मागे पाहिलेच आहे. संशोधक नेहमीच लहान-मोठ्या न्यादर्शाचा वापर करून लोकसंख्येसंबंधी काही सांख्यिकी निष्कर्ष काढण्याचा प्रयत्न करीत असतो. एकाच न्यादर्शाच्या बाबतीत विविध वेळी आणि एकाच लोकसंख्येतून निवडलेल्या विविध न्यादर्शाच्या बाबतीत एकाच वेळेला समान सांख्यिकीसुद्धा एकरूप येत नाहीत. त्यांच्यामध्ये थोडाफार फरक आढळतोच. अनेक वेळा हा फरक योगायोगाने / अपघाताने / प्रसंगावशात येतो. अशा फरकाला योगायोग त्रुटी (Chance error) असे म्हणतात. पण तिची मात्रा फार मोठी नसते. ही योगायोग त्रुटी किती पातळीपर्यंत दुर्लक्षित ठरू शकते हे ठरविण्यासाठी सार्थकता स्तराचा वापर करतात. हे सार्थकता स्तर दोन पातळीवर मोजले जातात.

सार्थकता स्तराच्या दोन पातळ्या

★ किमान पातळीला ५% किंवा ०.०५ सार्थकता स्तर असे म्हणतात.

★ कमाल पातळीला १% किंवा ०.०१ सार्थकता स्तर असे म्हणतात.

सार्थकता स्तराची संकल्पना विश्वासांतर या संकल्पनेशी मिळतीजुळती आहे. ०.०५ सार्थकता स्तर ह्याचा अर्थ लोकसंख्येचे १०० नमुने घेतले तर त्यापैकी ९५ नमुन्यांच्या बाबतीत कमाल त्रुटी किती येऊ शकेल ? हे सांगणे होय. ०.०५ सार्थकता स्तराचा वापर करूनच ०.९५ विश्वासांतर काढले जाते. कारण ०.०५ विश्वासांतर म्हणजे सांख्यिकीच्या ९५% किंमती त्या मर्यादेच्या आत आल्या पाहिजेत आणि फक्त ५% किंमती त्यापेक्षा मोठ्या आल्या तरी चालतील. जर आपण मध्यमानाची किंमत काढली असेल आणि σ_M ही मध्यमानाची प्रमाणत्रुटी असेल तर ०.९५ विश्वासांतर पुढीलप्रमाणे मांडले जाते.

मध्यमानाचे ०.९५ विश्वासांतर = M $\pm$ १.९६ σ_M.

ह्यामध्ये $\pm$ १.९६ σ_M हा मध्यमानासाठी ०.०५ सार्थकता स्तरच आहे.

सार्थकता स्तराचा उपयोग एकाच लोकसंख्येतून निवडलेल्या विविध न्यादर्शातील मध्यमानाचा किंवा एकाच न्यादर्शातील सांख्यिकीचे अनेक वेळा मध्यमानाचे मापन केल्यास सांख्यिकीमधील फरकाची यथार्थता पाहण्यासाठी करता येतो. प्रमाण विचलन, सहसंबंध गुणक, इत्यादी प्रगत सांख्यिकी मापनाच्या बाबतीतही ह्या तंत्राचा चांगला उपयोग होतो.

०.०५ या सार्थकता स्तरामुळे आपली सांख्यिकी विश्वसनीय आहे किंवा नाही याची प्राथमिक तपासणी होते. यानंतरचा अंतिम तपासणीचा जो कठोर सार्थकता स्तर असतो त्याला ०.०१ सार्थकता स्तर असे म्हणतात. ०.९९ विश्वासांतर म्हणजे सांख्यिकीच्या ९९% किंमती ह्या त्या मर्यादेच्या आत आल्या पाहिजेत, हे आपणांस माहीत आहेच.

मध्यमानाचे ०.९९ विश्वासांतर = $M \pm$ २.५८ σ_M म्हणून

$\pm$ २.५८ σ_M हा मध्यमानासाठी ०.०१ सार्थकता स्तरच आहे. हे लक्षात ठेवणे जरुरीचे असते.

या सार्थकता स्तराचा वापर करून ०.०५ आणि ०.०१ सार्थकता पातळीसाठी सांख्यिकीची किमान आणि कमाल जी मर्यादा येते त्यानां फिडुशिअरी मर्यादा असेही म्हणतात. कारण ही गोष्ट संख्याशास्त्राचे पॅरामीटरमध्ये रूपांतर करण्यासाठी प्रसिद्ध संख्याशास्त्रज्ञ एमिल फिशर यांनी निश्चित केलेली आहे. त्यांनी हे नामकरण केले आहे.

०.९५ विश्वासांतर = संशोधनातील ०.९५ फिडुशिअरी संभाव्यता.

०.९९ विश्वासांतर = संशोधनातील ०.९९ फिडुशिअरी संभाव्यता.

सार्थकता स्तराच्या $\pm$ १.९६ आणि $\pm$ २.५८ या मर्यादा मोठ्या न्यादर्शाबाबतीत अचूक लागू पडतात. पण न्यादर्श छोटा (३० पेक्षा कमी व्यक्तीचा) असेल तर ते वितरण चिपिटशिखरी असल्यामुळे या मर्यादांची किंमत वाढते व त्यासाठी स्वाधीनता मात्रांचा विचार करणारे खास कोष्टक पाहावे लागते. हे कोष्टक परिशिष्ट क्रमांक ....१ मध्ये दिलेले आहे.

सार्थकता स्तराची किंमत जेवढी किमान तेवढे मापन अधिकाधिक वैध व विश्वसनीय होत असते.

४.४ शून्य परिकल्पना (Null Hypothesis)

जेव्हा एकाच लोकसंख्येतून निवडलेल्या दोन न्यादर्शामधील समान सांख्यिकीबाबत एकरूपता आढळत नाही त्या वेळी त्यांच्यात आढळून येणारा फरक खरा आहे की खोटा हे ठरविणे संशोधकासाठी क्रमप्राप्त ठरते. हा फरक सार्थक आहे की निरर्थक आहे ? हे पडताळून पाहण्यासाठी एक सर्वसामान्य संकल्पनेचा वापर केला जातो. त्या संकल्पनेला शून्य परिकल्पना / अभ्युपगम वा शून्य फरक असे म्हणतात. (No difference i.e. Null Hypothesis)

ह्या संकल्पनेची उभारणी कायद्यामधील एका मूलभूत आणि सर्वमान्य तत्त्वावर केलेली आहे. ते तत्त्व म्हणजे -

जोपर्यंत १००% निर्विवादपणे गुन्हा सिद्ध होत नाही तोपर्यंत प्रत्येक आरोपीला न्यायालयात निर्दोष मानावे असे कायदा सांगतो. म्हणजेच एखाद्या आरोपीवर सबळ पुराव्याच्या आधारे आणि नि:संशयपणे गुन्हा सिद्ध होत नाही तोपर्यंत प्रत्येक आरोपीला निर्दोष समजून न्यायालयाकडून संशयाचा फायदा मिळू शकतो आणि काही पुरावा आरोपीच्या विरूद्ध असला तरी त्याला गुन्हेगार घोषित केले जात नाही व निर्दोषी म्हणून त्याची मुक्तता केली जाते. १००% गुन्हा शाबित करणे हे फिर्यादीचे काम ठरते. आरोपी आपल्याकडून पुरावा सादर न करताही आपण निर्दोषी आहोत, एवढेच म्हणतो.

ह्याचप्रमाणे दोन न्यादर्शाच्या समान सांख्यिकीमधील फरक किंवा एकाच न्यादर्शाच्या बाबतीत अनेक वेळा काढलेल्या एकाच सांख्यिकीमधील फरक खरा नाही तो योगायोगाने किंवा अपघाताने आलेला आहे. जर हा प्रयोग / संशोधन पुन्हा पुन्हा केले तर हा फरक शून्य येईल, असे गृहीत धरून मगच फरकाची सार्थकता तपासली जाते. समान सांख्यिकीमधील फरकाच्या निरर्थकतेला संख्याशास्त्रात शून्य परिकल्पना अभ्युपगम असे म्हटले जाते. म्हणजे दोन न्यादर्शांचे M_1 व M_2 ही मध्यमाने असतील तेव्हा - $\therefore M_1 - M_2 = 0$

या सूत्राने तिचे वर्णन करता येईल.

परंतु प्रत्यक्ष व्यवहारात $M_1 - M_2$ ची किंमत कधीही शून्य येत नाही. थोडा फार फरक येतोच. म्हणून शून्य परिकल्पनेचे परिष्कृत रूप म्हणून $M_1 - M_2 \rightarrow 0$ असे धरतात. ह्याचा अर्थ फरक अत्यल्प आणि निरर्थक आहे असा होतो आणि आलेला फरक सार्थकता स्तर किंवा विश्वासांतराच्या आधारे पडताळून पाहतात. मगच तो खरा / खोटा ठरतो.

दुसऱ्या शब्दात शंभरातील ९५ वेळेस आणि शंभरातील ९९ वेळेस कमाल किती फरक-पडू शकतो हे आपणांस शोधता येते आणि पडणारा फरक हा जर त्यापेक्षा कमी असेल तर तो फरक योगायोगाने / अपघाताने आलेला आहे असे समजून फरक दुर्लक्षिला जातो. शून्य परिकल्पना स्वीकृत केली जाते. दोन सांख्यिकीमध्ये वास्तव फरक नसून आलेली सांख्यिकी हे पॅरामीटर किंवा त्याच्या जवळपासची आहे असे सांगता येते.

समान सांख्यिकीत फरक येत असेल तर तो खरा आहे, हे सिद्ध करण्याची जबाबदारी संशोधकावर असते. शून्य परिकल्पना मांडणाऱ्यावर ती सिद्ध करण्याची जबाबदारी नसते. फरक सिद्ध झाला तर तो सार्थ मानून शून्य परिकल्पना अस्वीकृत केली जाते. पण फरक सिद्ध करता आला नाही तर मग मात्र फरक नाकारून शून्य परिकल्पना आपोआप स्वीकृत केली जाते. त्यासाठी पुरावा लागत नाही आणि ती सिद्ध करूनही दाखवावी लागत नाही.

शून्य परिकल्पनेचा स्वीकार आणि त्याज्यता पुढील दोन उदाहरणांवरून, स्पष्टपणे तुमच्या लक्षात येईल.

लोकसंख्येची सरासरी बुद्धिमत्ता मोजण्यासाठी आपण प्रत्येकी १०० व्यक्तींचे काही न्यादर्श निवडले. न्यादर्श एक व दोन यांची मध्यमाने अनुक्रमे १००, १०२ आली आणि प्रमाण विचलने २० व २१ आली. येथे शून्य परिकल्पना असे सांगते की, दोन्ही न्यादर्शाच्या सरासरी बुद्ध्यांकात फरक नसतो. मग शून्य परिकल्पनेचा स्वीकार करावयाचा की, त्याग करायची यासाठी पुढील सांख्यिकी कार्य संशोधकाला करावे लागेल.

दोन मध्यमानातील फरक (D) = $M_1 - M_2$ = १०२ - १०० = २.

ह्यानंतर या दोन्ही मध्यमानांच्या प्रमाणत्रुटी शोधणार. त्यासाठी -

$$\sigma_{M_1} = \frac{\sigma_1}{\sqrt{N_1}} = \frac{२०}{\sqrt{९००}} = \frac{२०}{३०} = ०.६७$$

$$\sigma_{M2} = \frac{\sigma_2}{\sqrt{N_2}} = \frac{२१}{\sqrt{९००}} = \frac{२१}{३०} = ०.७०$$

मध्यमान प्रमाणत्रुटीच्या आधारे फरकाची प्रमाणत्रुटी शोधणार

$$\sigma_{DM} = \sqrt{\sigma_{M_1}{}^2 + \sigma_{M_2}{}^2}$$

$$\sigma_{DM} = \sqrt{(०.६७)^२ + (०.७०)^२}$$

$$= \sqrt{०.४४ + ०.४९} = \sqrt{०.९३} = ०.९६$$

$$\text{फरकाचे गुणोत्तर} = \frac{(D)}{\sigma_{DM}}$$

$$\text{फरकाचे क्रांतिक गुणोत्तर (C.R.)} = \frac{\text{दोन मध्यमानातील फरक}}{\text{फरकाची प्रमाणत्रुटी}}$$

$$= \frac{M_2 - M_1}{०.९६} = \frac{१०२ - १००}{०.९६}$$

$$= \frac{२}{०.९६} = २.०८$$

हे गुणोत्तर जर १.९६ पेक्षा कमी आले असते तर फरक खोटा आहे असे मानून आपण प्रथम आलेले मध्यमान १०० हीच लोकसंख्येची सरासरी बुद्धिमत्ता आहे असा निष्कर्ष मांडू शकतो. परंतु उत्तर $\pm$ १.९६ पेक्षा जास्त आले आहे म्हणून फरक खरा मानून शून्य परिकल्पनेचा त्याग करावा लागेल आणि दोन्ही गट लोकसंख्येतील वेगवेगळे प्रातिनिधिक गट आहेत, असे दिसून येते असेच म्हणावे लागेल.

आपल्या संशोधकाच्या मापनात भारतातील गुरखा लोकांची सरासरी उंची १५० सें.मी. आली तर पंजाबी लोकांची सरासरी उंची १७० सेंमी. आली. दोन्हीही न्यादर्श आपण भारतीय लोकसंख्येतून निवडले असले तरी दोन्ही सांख्यिकीमध्ये १७०-१५० = २० सें.मी. इतका फरक येतो. समजा फरकाची प्रमाणत्रुटी आकडेमोडीवरून ५ सें.मी. इतकी आढळली. ह्यावर

$$\text{फरकाचे क्रांतिक गुणोत्तर} = \frac{D}{\sigma_{DM}} = \frac{२०}{५} = ४$$

फरकाचे हे गुणोत्तर १.९६ आणि २.५८ या दोन्ही किंमतीपेक्षा पुष्कळ जास्त आहे. याचाच अर्थ हा फरक सार्थ आणि विश्वसनीय आहे. तो कायमस्वरूपी टिकणारा आहे. म्हणून शून्य परिकल्पनेचा त्याग करून आपण असा निष्कर्ष मांडू शकतो की, **गुरखा लोकांपेक्षा पंजाबी लोक जास्त उंच असतात.**

४.५ दिशांकित परिकल्पना (Directional Hypothesis)

शून्य परिकल्पनेमध्ये दोन किंवा दोनापेक्षा जास्त गटांची समान सांख्यिकी घेतली असता, त्यामध्ये धनात्मक किंवा ऋणात्मक अगर शून्य फरक येऊ शकतो, हे गृहीत धरूनच फरकाची सार्थकता पडताळून पाहावयाची असते पण कधी कधी असे घडते की, येणारा फरक हा निश्चित धन किंवा निश्चित ऋण यापैकीच कोणता येईल, यासंबंधी संशोधकाची किंवा प्रयोगकर्त्याची खात्री असते. म्हणजे **पहिल्या नमुन्याच्या किंवा पहिल्या प्रयोगातील सांख्यिकीपेक्षा दुसऱ्या नमुन्याचे किंवा दुसऱ्या प्रयोगातील सांख्यिकी निश्चित धन असेल असे प्रयोगकर्ता वा संशोधक ठामपणे सांगतो किंवा नाही तर हा फरक ऋणच येईल, असे ठामपणे सांगतो. अशा वेळी संशोधकाने स्वीकृत केलेल्या परिकल्पनेला दिशांकित परिकल्पना असे म्हणतात.**

ह्या परिकल्पनेच्या बाबतीत फरकाची सार्थकता पाहण्यासाठी करावयाचे सांख्यिकी संस्कार प्रसामान्य विभाजन वक्राचा ऊर्ध्व / वरचा भाग किंवा निम्न भाग यांपैकी एकाच भागात करावे लागतात. दुसरा अर्ध हा पूर्णपणे आवृत्त (Closed) असतो. परिणामी फरकाची सार्थकता पाहण्यासाठी तेव्हा ०.०५ सार्थकता स्तरापर्यंत जाण्यासाठी मुक्त / अनावृत्त (Open) अर्धातील फक्त ४५% क्षेत्रफळ व्यापले जाणे पुरेसे ठरते. शून्य परिकल्पनेप्रमाणे ४७.५% क्षेत्रफळ व्यापण्याची गरज नसते. म्हणजे क्रांतिक गुणोत्तर किंवा t- गुणोत्तर १.६५ किंवा त्यापेक्षा जास्त आले तरी तो फरक सार्थ ठरतो. (शून्य परिकल्पनेप्रमाणे ते गुणोत्तर किमान १.९६ किंवा त्यापेक्षा जास्त आले तरच तो फरक सार्थ ठरतो). शून्य परिकल्पनेप्रमाणे ते गुणोत्तर किमान १.९६ येण्याची गरज नसते तसेच हा फरक अतिशय सार्थ ठरण्यासाठी त्याने वक्राचे ९९% क्षेत्र व्यापले पाहिजे म्हणजे मुक्त अर्धातील ४९% टक्के इतकेच क्षेत्रफळ व्यापावे लागते. (शून्य परिकल्पनेप्रमाणे ४९.५०% क्षेत्रफळ व्यापण्याची गरज नसते. त्यासाठी क्रांतिक गुणोत्तर किंवा t गुणोत्तर २.३३ टक्के पुरेसे ठरते. शून्य परिकल्पनेप्रमाणे २.५८ इतके असण्याची गरज नसते.) **सोप्या भाषेत दिशांकित परिकल्पनेच्या परीक्षणाला एकपुच्छ चाचणी असे म्हणतात. कारण त्या वक्राला एकच मुक्त शेपूट असते.**

सामग्री विश्लेषणासाठी आवश्यक संकल्पना तुम्हांला स्पष्ट झाल्या असतीलच. प्रसामान्य संभव वक्राबाबतची प्राथमिक माहिती आपण मूलभूत सांख्यिकीमध्ये अभ्यासली आहेच. संशोधनामध्ये प्रसामान्य संभव वक्राचे महत्त्व पुढे स्पष्ट केलेले आहेत.

५.० संशोधनासाठी प्रसामान्य संभव वक्राचे उपयोजन

संशोधनाचा अन्वयार्थ लावण्यासाठी आणि त्याआधारे निष्कर्ष मांडण्यासाठी प्रसामान्य संभव वक्राचा फार मोठ्या प्रमाणात उपयोग होतो. ज्या क्षेत्रातील संशोधनाद्वारे व्यक्तिगुणांची मोजदाद केली जाते. (उदा. शिक्षणशास्त्र, समाजशास्त्र, मानसशास्त्र) आणि त्यावरून संपूर्ण जनसंख्येसंबंधी निष्कर्ष मांडले जातात. तेथे तेथे निष्कर्ष बिनचूक यावेत यासाठी संशोधकाला / प्रयोजकाला प्रसामान्य संभव वक्राचे क्षेत्रफळविषयक गुणधर्म माहीत असणे अत्यावश्यक आहे.,तसेच त्याचे व्यावहारिक उपयोजन करता येणे गरजेचे असते.

प्रसामान्य संभव वक्राचे उपयोग अनेकविध ठिकाणी होतात. त्यातील संशोधनाच्या दृष्टीने असलेले काही महत्त्वाचे उपयोग पुढे स्पष्ट केलेले आहेत. ते असे -

५.१ भाकित / पूर्वकथन (Prediction)

५.२ संभवनीयता (Probability)

५.३ गुणवत्तेनुसार गटविभागणी (Division of the group)

५.४ सांख्यिकीची प्रमाणत्रुटी (Standard Error)

५.५ सांख्यिकी आणि प्रमाण नित्यके (Statistics and Parameters)

संशोधनासाठी प्रसामान्य संभव वक्राचा उपयोग करताना दोन गोष्टी माहिती असणे अत्यावश्यक असते. त्या म्हणजे गटाचे मध्यमान किती ? आणि गटाचे प्रमाण विचलन किती ? जोडीला गटातील व्यक्तींची संख्या माहीत असेल तर टक्केवारीऐवजी संख्येतसुद्धा उत्तर काढता येते.

संशोधनात या वक्राचा उपयोग कसा केला जातो ते उदाहरणाच्या मदतीने आपण पडताळून पाहू या.

५.१ भाकित / पूर्वकथन (Prediction)

लोकसंख्येचे / गटाचे मध्यमान, प्रमाण विचलन त्याचबरोबर न्यादर्शातील व्यक्ती संख्या माहिती असेल तर प्रसामान्य संभव वक्राच्या साहाय्याने अचूक भाकित करता येते.

★ या वक्राच्या मदतीने दिलेल्या दोन गुणांकादरम्यान किती टक्के किंवा किती व्यक्ती असू शकतील, हे आपणांस निश्चित सांगता येते.

★ एखाद्या विशिष्ट गुणांकापेक्षा कमी किंवा जास्त गुणांक मिळविणाऱ्या गटातील व्यक्तींची संख्या किंवा टक्केवारी निश्चितपणे सांगता येते.

★ संशोधनासाठी अचूक असा बहुस्तरीय न्यादर्श निवडण्यासाठी उपयोग होऊ शकतो.

★ पूर्वकथनाने निश्चित केलेला अंदाज आणि वस्तुस्थिती यांची तुलना करून आपण केलेले मापन बरोबर आहे किंवा नाही हेसुद्धा ठरविता येते.

हे सर्व आपण एका उदाहरणाद्वारे समजावून घेऊ.

एका संशोधकाने त्याच्या संस्थेतील ''विविध शाळेतील इयत्ता ९ वी च्या १००० विद्यार्थ्यांवर व्याख्यान आणि दृक्-श्राव्य माध्यमांद्वारे अध्यापन ह्या कार्यनीतीच्या परिणामाचा तौलनिक अभ्यास'' अशी संशोधन समस्या घेतली. त्यासाठी नमुना / न्यादर्श निवडताना त्याला विविध बौद्धिक स्तरातील विद्यार्थ्यांचा विचार करावा लागेल.

लोकसंख्येचे बुद्धिमत्तेबाबतचे मध्यमान M = १०० आहे आणि प्रमाण विचलन σ = २० आहे असे मानले तर -

(अ) संशोधकाने निवडलेल्या गटात ६० ते १४० बुद्ध्यांकादरम्यान या न्यादर्शात किती विद्यार्थी असले पाहिजेत ?

(आ) ६० पेक्षा कमी बुद्ध्यांक असणाऱ्या विद्यार्थ्यांची आणि १४० पेक्षा जास्त बुद्ध्यांक असणाऱ्या विद्यार्थ्यांची संख्या किती असली पाहिजे ?

हे ठरविण्यासाठी संशोधकाने त्याला मिळालेल्या माहितीचे पुढीलप्रमाणे विश्लेषण / परीक्षण केले.

संशोधनात मिळालेली माहिती.

लोकसंख्येचे मध्यमान M = १००

प्रमाण विचलन = २०

$\therefore$ ६० ते १४० बुद्ध्यांकादरम्यान असणाऱ्या विद्यार्थ्यांची संख्या त्याने मध्यमान (M) आणि प्रमाण विचलनाचा वापर करून काढली. ती अशी...

६० = १०० - ४० = $M - 2\sigma$ = ४७.७२%

१४० = १००+४० = $M + 2\sigma$ = ४७.७२%

$\therefore$ $M - 2\sigma$ ते $M + 2\sigma$= ९५.४४% जनसंख्या असते.

$\therefore$ शंभरामध्ये ६० ते १४० च्या दरम्यान ९५.४४% विद्यार्थी असतील तर १००० मध्ये ९५४.४ विद्यार्थी म्हणजे ९५४ विद्यार्थी या न्यादर्शात घ्यावे लागतील.

६० बुद्ध्यांकापेक्षा कमी बुद्ध्यांक असलेले विद्यार्थी किती असावे लागतील? हे पाहण्यासाठी त्याने पुढीलप्रमाणे सांख्यिकांचा वापर केला.

६० = १०० - ४० = $M - 2\sigma$

याचाच अर्थ हे लोक $M - 2\sigma$ पेक्षा खालच्या स्तरावर असले पाहिजे. $M - 2\sigma$ च्या दरम्यान ४७.७२% लोक असतात. $\therefore$ त्याच्यापेक्षा कमी बुद्ध्यांकाचे विद्यार्थी काढण्यासाठी

५०% - ४७.७२% = २.२८% जनसंख्या ही ६० पेक्षा कमी बुद्ध्यांक असलेली आहे.

१०० पैकी २.२८% तर १००० ह्या न्यादर्शात २३ विद्यार्थी संशोधकाला ६० पेक्षा कमी बुद्ध्यांकाचे घ्यावे लागतील.

१४० पेक्षा जास्त बुद्ध्यांकाचे विद्यार्थी निवडण्यासाठी तो पुढीलप्रमाणे सांख्यिकीचे कार्य करेल.

१४० = १०० + ४० = $M + 2\sigma$ = ४७.७२

१४० च्या वरचे = ५० - ४७.७२ = २.२८%

$\therefore$ १०० मध्ये २.२८ विद्यार्थी तर

$\because$ १००० मध्ये ?

२२.८ $\cong$ २३

थोडक्यात संशोधकाला ६० पेक्षा कमी बुद्ध्यांक असणारे २३ विद्यार्थी ६० ते १४० च्या दरम्यान बुद्ध्यांक असणारे ९५४ विद्यार्थी आणि १४० पेक्षा जास्त बुद्ध्यांक असणारे २३ विद्यार्थी घ्यावे लागतील. यासाठी तुम्हांला क्षेत्रफळाविषयीचे कोष्टक वापरावे लागते. हे कोष्टक परिशिष्ट क्र. २ मध्ये दिलेले आहे.

भाकिताचा वापर करून आपणांस मध्यभागी, केंद्रस्थानी असलेल्या क्षेत्रफळासाठी / लोकसंख्येसाठी गुणांक मर्यादाही ठरविता येतात.

निम्नस्तरावरील विशिष्ट लोकसंख्येसाठी उच्चतम मर्यादा आणि श्रेष्ठतम स्तरावरील विशिष्ट लोकसंख्येसाठी सुरुवातीचा गुणांकसुद्धा (नीचतम मर्यादा) काढता येतो. हे आपण पुढील उदाहरणाने समजावून घेऊ.

समजा, संशोधकाने विकसित केलेल्या एका चाचणीचे मध्यमान १५० मिळाले आणि प्रमाण विचलन ३६ होते. त्याने निवडलेल्या न्यादर्शात ८०० व्यक्ती होत्या तर मग मधल्या ४०० व्यक्तींसाठी गुणांक मर्यादा कोणती असेल ? निम्नस्तरावरील ८० व्यक्तींसाठी उच्चतम मर्यादा आणि श्रेष्ठतम स्तरावरील ४० व्यक्तींसाठी सुरुवातीचा गुणांक कोणता असेल ? हे संशोधकाला निश्चित करावयाचे असेल तेव्हा

- या संशोधनामधील

मध्यमान M = १५०

प्रमाण विचलन σ = ३६ N = ८००

ह्या गोष्टी प्राथमिक माहिती म्हणून त्याने शोधलेल्या आहेत.

मधल्या ४०० व्यक्तींसाठी गुणांक मर्यादा काढण्यासाठी प्रथम त्याचे शेकडेवारीत रूपांतर करावे लागेल.

∴ ८०० मध्ये ४००

∵ १०० मध्ये ?

$$\frac{४०० \times १००}{८००} = ५०\%$$

मधले ५०% ह्याचा अर्थ मध्यमानाच्या खालचे २५% आणि मध्यमानाच्या वरचे २५% इतके लोक त्यामध्ये आले पाहिजेत.

क्षेत्रफळाविषयक कोष्टकावरून २५% क्षेत्रफळासाठी २/३σ (०.६७σ) इतके अंतर असावे लागते. हे कोष्टक परिशिष्ट क्रमांक २ मध्ये देण्यात आलेले आहे.

∴ मधले ५०% लोक M - २/३σ ते M + २/३σ दरम्यान आहेत.

$$M - \frac{२}{३}\sigma = १५० - \frac{२}{३} \times ३६$$

= १५० - २४

= १२६ ही निचतम मर्यादा असेल तर

$$= M + \frac{२}{३}\sigma = १५० + \frac{२}{३} \times ३६$$

= १५० + २४ = १७४ ही गुणांकाबाबत उच्चतम मर्यादा असेल.

∴ मधल्या ४०० व्यक्तींसाठी गुणांक मर्यादा ही १२६ ते १७४ या दरम्यानच आहे असे संशोधकाला खात्रीपूर्वक सांगता येते.

निम्नस्तरातील ८० लोकांसाठी कमाल गुणांकही आपल्याला पुढीलप्रमाणे काढता येतो.

जर - ∴ ८०० ८०

∵ १०० ?

$$\frac{१०० \times ८०}{८००} = १०\%$$

तेव्हा निम्न १०% हा स्तर मध्यमानाच्या खाली ४०% क्षेत्रफळानंतर येणारा आहे आणि ४०% क्षेत्रफळासाठी कोष्टकावरून १.२८σ अंतर जावे लागते. हे संशोधकाला शोधता येते.

∴ अंतिम (निम्नतम) १०% लोकांसाठी सर्वोत्तम

गुणांक = M - १.२८σ

= १५० - १.२८ x ३६

= १५० - ४६.०८ = १०३.९२ म्हणजेच १०४

∴ निम्नतम निकृष्ट १०% लोकांसाठी सर्वाधिक गुणांक १०४ येईल. त्या सगळ्यांना १०४ पेक्षा कमी गुणांकच मिळतील.

श्रेष्ठतम ४० लोकांचा किमान गुणांक त्यांना गुणदान मिळण्यास कुठून सुरुवात झाली हे काढण्यासाठी पुढीलप्रमाणे सांख्यिकीय कार्य करावे लागेल.

∴ ८०० ४०

∵ १०० ?

$$\frac{१०० \times ४०}{८००} = ५\%$$

अंतिम ५% क्षेत्रफळ हे मध्यमानावरील ४५% क्षेत्रफळ संपल्यानंतर सुरू होते. क्षेत्रफळाच्या कोष्टकावरून ४५% क्षेत्रफळासाठी १.६५ σ इतके अंतर जावे लागते.

∴ अंतिम (श्रेष्ठतम) ५% लोकांचा सुरूवातीचा गुणांक

= M + १.६५σ = १५० + १.६५ x ३६

= १५०+५९.४० = २०९.४० म्हणजेच २०९

∴ श्रेष्ठतम ४० लोकांचा किमान गुणांक २०९ येईल. त्या सर्वांना २०९ पेक्षा जास्त गुणांकच मिळतील.

५.२ संभवनीयता (Probability)

एकसारखे प्रयत्न केले तर त्यातून आपल्याला अपेक्षित असलेली गोष्ट किती वेळा घडून येऊ शकते. यालाच संख्याशास्त्रात संभवनीयता / संभाव्यता असे म्हणतात. प्रसामान्य संभव वक्राच्या मदतीने आपल्याला मिळणारी आधारसामग्री सुयोग्य मिळते किंवा नाही ह्याचा संशोधकाला पडताळा घेता येतो. तसेच संशोधन केल्यानंतर त्याच्या आधारे विचारल्या जाणाऱ्या प्रश्नांची अचूक उत्तरेही देता येतात. ह्यासाठी एका संशोधनाचा आपण आढावा घेऊ या !

महाराष्ट्रामध्ये डॉ. व्ही. व्ही. कामत यांनी टर्मन आणि मेरील यांची बिने स्टॅनफोर्ड रिव्हिजन ही बुद्धिमापन चाचणी इ.स. १९५० च्या सुमारास भारतीय परिस्थितीसाठी प्रमाणित केलेली आहे. तेव्हा

डॉ. कामत यांना असे आढळून आले की, बुद्धिमत्तेची सरासरी १०० आणि प्रमाण विचलन २० इतके आहे. त्यानंतर एका संशोधकाला विद्यार्थ्यांचे बुद्धिमापन करण्यासाठी व्ही. व्ही. कामत यांनी विकसित केलेली चाचणी वापरावयाची आहे. त्यांचा न्यादर्श ५०० विद्यार्थी संख्येचा आहे. मग संशोधकाला या गटामध्ये १२० पेक्षा जास्त बुद्धिमत्ता असणारी मुले सापडण्याची संभवनीयता किती ?

M = १००   σ = २०,   N = ५००

ही संशोधकाची आधारसामग्री आहे.

१२० हा गुणांक मध्यमानापासून १२० - १०० = २० इतक्या गुणांक अंतरावर आहे, हे निश्चित झाले.

२० हे गुणांकांतर σ च्या स्वरूपात १σ इतके येते.

(कारण σ = २० आहे.)

∴ १२० पेक्षा जास्त बुद्ध्यांक असणारे विद्यार्थी M + १σ यानंतरचे असणार आहेत.

M + १σ पर्यंत विभाजनाच्या वरच्या अर्ध्यातील ३४.१३% इतके क्षेत्रफळ येते.

∴ त्यानंतर वरच्या अर्धातील उरलेले क्षेत्रफळ = ५०% - ३४.१३% = १५.८७% इतके राहील. (अंदाजे १६%)

∴ १००   १५.८७

∵ ५००   ?

$$\frac{१५.८७ \times ५००}{१००} = ७९.३५$$

याचा अर्थ असा की, संशोधकाने संशोधनासाठी निवडलेल्या न्यादर्शात १२० पेक्षा जास्त बुद्धिमत्ता असणाऱ्याची संख्या ५०० मध्ये ७९ किंवा १०० मध्ये १६ तर प्रत्येक सहा विद्यार्थ्यांमागे एक विद्यार्थी अशी आहे, हे लक्षात ठेवूनच त्याला संशोधनाचे निष्कर्ष मांडावे लागतील. ह्यामुळे आपल्या संशोधनातील निवड आणि वर्गीकरण ह्यासाठी संभवनीयतेचे गुणधर्म अतिशय उपयुक्त ठरतात.

५.३ गुणवत्तेनुसार गटविभागणी (Division of the group)

जगातील लोकसंख्येत प्रचंड प्रमाणावर व्यक्ती आणि व्यक्तिभेद असतात म्हणून संशोधनासाठी घेतलेल्या कोणत्याही जनसंख्येमध्ये अनेक उपगट असतात. या जनसंख्येतील व्यक्तिगुणांचे वितरण जर प्रसामान्य संभव वक्राप्रमाणे असेल तर जनसंख्येचे (गटाचे) संशोधकाला शास्त्रशुद्ध पद्धतीने विभाजन करता येते. शास्त्रशुद्ध गटविभागणीची आपल्या संशोधनात मिळालेल्या गटविभागणीशी तुलनाही करून पाहता येते. जर न्यादर्श संख्येचे दोनच उपगट पाडावयाचे असतील तर ते काम फार सोपे असते. मध्यमानाच्या खालील ५०% कनिष्ठ प्रतीचे आणि मध्यमानाच्या वर ५०% श्रेष्ठ प्रतीचे लोक असतात. पण जनसंख्येचे आपण नेहमी किमान तीन उपगटांमध्ये विभाजन करतो. ते म्हणजे सर्वसामान्य, सर्वसामान्यांपेक्षा श्रेष्ठ आणि सर्वसामान्यांपेक्षा कनिष्ठ स्तर यासाठी प्रसामान्य संभव वक्राचा ६σ इतका जो एकूण विस्तार असतो त्याचे तीन समान भाग - ६σ /३ = २σ लांबीचा प्रत्येक गट इतका विचारात

घ्यावयाचा असतो. सर्वसामान्यांचा मधला गट हा M $\pm$ १σ एवढ्या अंतरात असतो. हे तुमच्या लक्षात आले असेलच.

संशोधकाने न्यादर्शाची निवड करताना प्रातिनिधिक जनसंख्येसाठी नेहमी ६८% लोक सर्वसामान्य असले पाहिजे, हे लक्षात ठेवणे गरजेचे आहे. तसेच १६% निम्नस्तरातील १६% उच्च स्तरातील व्यक्ती असल्या पाहिजेत. यापेक्षाही अधिक काटेकोर संशोधन करावयाचे असेल तर लोकसंख्येचे प्रातिनिधिक असे पाच गट करतात. त्यांना अनुक्रमे निकृष्ट, सामान्यापेक्षा कमी, सामान्यात सामान्यापेक्षा श्रेष्ठ आणि सर्वोत्कृष्ट अशी नावे दिली जातात.

त्यामध्ये अनुक्रमे ३.५%, २४%, ४५%, २४%, ३.५% या प्रमाणात लोक असतात. हे शोधण्यासाठी ६σ अंतराला ६ ने भागून प्रत्येक गटाचा विस्तार १.२σ निश्चित केलेला असतो. M - ३σ पासून गट मोजायला सुरूवात होते. M + ३σ पाशी मोजदाद संपते. एक गोष्ट संशोधकाने लक्षात ठेवली पाहिजे की, लोकसंख्येचे पाहिजे तितके उपगट त्याला पाडता येतील. फक्त सर्व उपगटांची लांबी मात्र एकसमान असली पाहिजे.

त्यासाठी उपगटाचा विस्तार =

$$\text{अर्थात } \sigma \text{ लांबी} = \frac{६\sigma}{n}$$

हे सूत्र वापरावे. (n म्हणजे उपगटाची अपेक्षित संख्या).

न्यादर्शाचे तीन उपगटांत विभाजन करावयाचे असेल तर दर सहामधील ४ सर्वसामान्य १ निकृष्ट आणि १ श्रेष्ठ असे विभाजन करूनच न्यादर्श निश्चित करावयाचा असतो. प्रगत संशोधनामध्ये न्यादर्शाचे पाच उपगटांत विभाजन करावयाचे असेल तर दर २५ व्यक्तींमध्ये १ निकृष्ट १ श्रेष्ठ प्रत्येक ६-६ सामान्यापेक्षा कनिष्ठ आणि सामान्यापेक्षा उच्च दर्जाचे तर ११ सर्वसामान्य अशा व्यक्ती संशोधनासाठी निवडल्या म्हणजे संशोधन अधिक अचूक आणि परिणामकारक होऊ शकते. त्यातून मिळणारे निष्कर्ष आणि संशोधन फलिते व्यावहारिक उपयोगासाठी मोठ्या प्रमाणात वापरता येऊ शकतात.

५.४ सांख्यिकी आणि प्रमाणनित्यके (Statistics and Parameters)

ज्यावेळी लोकसंख्येसंबंधी निश्चित नियम किंवा निष्कर्ष सांगावयाचे असतील तेव्हा गुणात्मक पद्धतीऐवजी संख्यात्मक पद्धतीने सांगितलेल्या निष्कर्षांना अधिक महत्त्व असते. पण लोकसंख्येसंबंधी निश्चित निष्कर्ष काढावयाचे असतील तर त्यासाठी अतिशय कमी कालावधीत संपूर्ण लोकसंख्येची त्या गोष्टीसाठी गणना करता आली पाहिजे. तरच लोकसंख्येची प्रमाणनित्यके आपणांस सांगता येतील.

उदाहरणार्थ, भारतीय लोकांची सरासरी उंची, महाराष्ट्रीयन माणसाचे सरासरी वार्षिक उत्पन्न नाशिक जिल्ह्यातील साक्षरतेचे प्रमाण, इत्यादी.

प्रमाणनित्यके ही विज्ञानाच्या महत्त्वपूर्ण सांख्यिकी संकल्पनांसारखी असतात. उदाहरणार्थ, पाण्याचा उत्कलन बिंदू, लोखंडाचा विलय बिंदू, हवेतील आर्द्रतेचे प्रमाण वगैरे, पण विज्ञानातील प्रमाणनित्यके ही नेहमी निरपेक्ष (Absolute) असतात. म्हणजेच त्यांच्या किंमतीमध्ये किंचितसुद्धा बदल होऊ शकत नाही. उदाहरणार्थ, पाण्याचा उत्कलन बिंदू १००° सेल्सिअस म्हणजे १००° से. ते ९९.९९° से. नाही किंवा १००.०१° से. सुद्धा नाही इतकी अचूकता लोकसंख्येच्या मापनात

टिकविली तर तिचीही प्रमाणनित्यके आपणांस ठरविता येऊ शकतील पण लोकसंख्या कधीच स्थिर नसते. गतिमानता हा तिचा अंगभूत स्थायीभाव आहे. त्यामुळे कोणत्याही क्षणी जशी संपूर्ण लोकसंख्या मोजणे शक्य होत नाही तसेच कोणत्याही दोन क्षणी लोकसंख्या तंतोतंत एकसारखी असत नाही. त्यामुळे हट्टाने एखादे प्रमाणनित्यक ठरविण्यासाठी आपण लोकसंख्या मोजण्यास सुरुवात केली तरी ती मोजून पूर्ण होईपर्यंत तिच्या रचनेमध्ये निश्चित बदल झालेला असतो म्हणून जनसंख्येची निरपेक्ष प्रमाणनित्यके ठरविण्यामध्ये अजून कुणालाही यश आलेले नाही. अशा वेळी जनसंख्येमधील पुरेसा प्रातिनिधिक न्यादर्श निवडून त्याचे काटेकोर मापन करून त्याआधारे लोकसंख्येची प्रमाणनित्यके ठरविण्याचाच प्रयत्न केला जातो. न्यादर्शाच्या आधारे तयार करण्यात आलेल्या अशा मापनाला सांख्यिकी असे म्हणतात आणि हे सांख्यिकी किती निर्दोष आहे, यावरून ते प्रमाणनित्यकाचे कितपत प्रतिनिधीत्व करू शकेल, याचा अंदाज करावा लागतो. प्रमाणनित्यकाप्रमाणे सांख्यिकी हे कधीच निरपेक्ष असत नाही. कारण न्यादर्शानुसार त्यामध्ये थोडाफार फेरफार होऊ शकतो. म्हणून सांख्यिकी हे सापेक्ष (Relative) आहे असे म्हणतात. सांख्यिकीच्या किंमतीत थोडा फरक मान्य केला जातो. (२ म्हणजे १.८ किंवा २.४ सुद्धा असते.)

सांख्यिकी हे प्रमाणनित्यकाचे प्रतिनिधित्व करणारे हवे असा संशोधकांचा आणि प्रयोगकर्त्यांचा सदैव प्रयत्न असतो. प्रमाणनित्यकाची निश्चित किंमत कुणालाच माहीत नसते. मग सांख्यिकी प्रमाणनित्यकाचे अचूक प्रतिनिधीत्व करते का ? हे कसे ठरवावयाचे ? तर सांख्यिकी हे प्रमाणनित्यकाच्या जितके जास्त जवळ असेल तितके ते प्रमाणनित्यकाचे उत्कृष्ट प्रतिनिधीत्व करू शकते. म्हणजे सांख्यिकीवरून प्रमाणनित्यकाच्या किंमतीचा जवळपास अचूक बोध संशोधकाला होऊ शकतो, हे घडायचे तर सांख्यिकी शोधताना कसलीही चूक होऊ नये किंवा त्रुटी राहून जाऊ नये ह्याची खात्री केली पाहिजे. पण असे घडत नाही. कळत-नकळत थोड्याफार त्रुटी राहूनच जातात आणि त्यांचा परिणाम काही प्रमाणात सांख्यिकीवर होतोच. तो किती होतो, हे प्रमाणत्रुटीने आपल्याला काढता येईल, म्हणून प्रमाणत्रुटी जितकी अल्प, तितके सांख्यिकी प्रमाणनित्यके होण्याची संभवनीयता सर्वाधिक असते. मात्र कितीही प्रयत्न केला तरी काही मानवी तर काही परिस्थितीजन्य त्रुटी ह्या राहणारच. प्रथम आपण सांख्यिकीतील प्रमाणत्रुटी म्हणजे काय ते समजावून घेऊ.

५.५ सांख्यिकीतील प्रमाणत्रुटी (Standard Error - SE)

सांख्यिकीचा खरा उपयोग जनसंख्येची प्रमाणके किंवा मानदंड ठरविण्यासाठी झाला पाहिजे. परंतु एका संशोधकाला किंवा संशोधकांच्या गटाला विशिष्ट कालमर्यादेत संपूर्ण जनसंख्येची मोजदाद करणे कधीच शक्य होत नाही. अगदी वैद्यकशास्त्रातसुद्धा एखादे औषध किंवा उपचार जनतेसाठी, प्रमाणित करायचे असतील तरी अपेक्षित असलेल्या संपूर्ण जनसंख्येवर प्रयोग करताच येत नाही. मर्यादित आणि जास्तीत जास्त प्रातिनिधिक अशा, हाताळणी शक्य असलेल्या, गटावरच प्रयोग करावे लागतात व त्या आधारे प्रमाणीकरण करावे लागते.

डॉ. जोनॉस साक यांनी पोलिओविरूद्धची प्रतिबंधक लस प्रमाणित करण्यासाठी जगातील सर्वात मोठा न्यादर्श म्हणजे अमेरिकेतील नुकत्याच जन्मलेल्या मुलांपासून ते पाच वर्षांच्या मुलांपर्यंतची जवळपास सर्व मुले संशोधनासाठी निवडली होती. या संशोधनासाठी त्यांनी ५४ लाख इतकी जनसंख्या घेतली पण हे काम करण्यासाठी साक यांना वीस हजार मदतनिसांची गरज लागली होती.

शिक्षणक्षेत्रात अध्ययन संक्रमण तपासण्यासाठी थॉर्नडाइक यांनी जे संशोधन केले होते त्यासाठी विशिष्ट वयोगटातील आणि विशिष्ट भूभागातील २८,००० विद्यार्थी निवडले होते. अध्ययन संक्रमण होते की नाही एवढे समजण्यासाठीसुद्धा थार्नडाइक यांना प्रायोगिक संशोधनासाठी तीन वर्षे लागली होती.

म्हणजेच संशोधन करताना संशोधकाना संपूर्ण जनसंख्या अभ्यासणे जवळपास अशक्यच असते. म्हणून जनसंख्येची प्रमाणके ठरविण्यासाठी न्यादर्श सांख्यिकीचा (Sampling Statistics) सर्वत्र वापर केला जातो. न्यादर्श हा निष्पक्षपाती आणि जनसंख्येचा खराखुरा प्रातिनिधिक ठेवण्याचा प्रयत्न मात्र केलेला असला पाहिजे. न्यादर्शाधारे जनसंख्येसंबंधी जी प्रमाणके सांगितली जातात त्यांना सांख्यिकी (Statistics) असे म्हणतात. ती नेहमी सापेक्ष आणि भाकिताच्या स्वरूपात असतात. जनसंख्येची वास्तव प्रमाणनित्यके (Parameter) ही मात्र निरपेक्ष आणि अंतिम स्वरूपाची असतात. जनसंख्येमध्ये इतकी विविधता आणि संकीर्णता आहे की तिची निश्चित प्रमाणके कुणालाच माहीत नसतात. म्हणून सांख्यिकीच्या आधारे प्रमाणकाची किंमत ठरविण्याचा प्रयत्न केला जातो. अर्थात, ही ठरविलेली किंमत प्रमाणकाची अचूक किंमत असेलच असे नाही. पण ती त्या किंमतीच्या जवळपास असू शकेल असे सांगता येते. प्रत्यक्ष मापनाने काढलेल्या कुठल्याही सांख्यिकीमध्ये तीन प्रकारच्या त्रुटी नेहमीच आढळतात.

(१) मापन करणाऱ्याकडून होणाऱ्या त्रुटी

(२) मापन साधनातील त्रुटी

(३) भौतिक परिस्थितीतून निर्माण होणाऱ्या त्रुटी

या सर्वांवर मात करण्यासाठी कोणतीही सांख्यिकी काढल्यानंतर त्याच्यामध्ये प्रमाणित त्रुटी किती असू शकेल ? याचा शोध घ्यावा लागतो. ही प्रमाणत्रुटी क्षुल्लक असेल. उदाहरणार्थ, किलोमध्ये मिलीग्रॅमची चूक तर ती दुर्लक्षणीय मानून सांख्यिकी हे प्रमाणकाच्या जवळपास आहे असे सांगून त्याचा मोठ्या प्रमाणावर वापर केला जातो. पण प्रमाणत्रुटी खूप मोठी असेल. उदाहरणार्थ, किलोग्रॅममध्ये किलोग्रॅमची चूक तर मात्र शोधलेली सांख्यिकी अविश्वसनीय आहे. त्यांच्या मदतीने जनसंख्येचे प्रमाणके शोधता येणार नाहीत म्हणून ती सांख्यिकी त्याज्य मानून टाकून दिली जाते व नव्याने संशोधन केले जाते.

संशोधक जेव्हा संशोधनामध्ये मापन करतो तेव्हा तो सुरुवातीलाच दोन गोष्टी निश्चित करतो. त्या म्हणजे गटाची सरासरी अर्थातच मध्यमान आणिं गटाची विचलनशीलता अर्थात प्रमाणविचलन आणि ह्या दोन गोष्टींचाच वापर प्राधान्याने प्रमाणत्रुटी शोधण्यासाठी केला जातो. संशोधनासाठीच्या गटातील व्यक्तींची एकूण संख्या (N) ही सुरुवातीलाच लक्षात घेतलेली असते.

प्रमाणत्रुटी ही प्रमाणविचलनाच्या सम-प्रमाणात आणि गटातील व्यक्ती संख्येच्या व्यस्त प्रमाणात बदलत असते.

थोडक्यात, प्रमाणविचलन जेवढे लहान तेवढी प्रमाणत्रुटी कमी येते आणि सांख्यिकी हे जनसंख्या प्रमाणकाच्या जवळपास असते. तसेच गटातील व्यक्तींची संख्या जितकी जास्त

तितकी प्रमाणत्रुटी कमी येते. मोठ्या गटसंख्येचा गुणांक विभाजन वक्र हा जवळपास प्रसामान्य विभाजन वक्रासारखाच असतो तर छोट्या गटसंख्येचा विभाजन वक्र हा नेहमी चिपिटशिखरी असतो. कोणत्याही लोकसंख्येतील निरनिराळे न्यादर्श घेऊन विशिष्ट सांख्यिकी काढल्या तर (उदाहरणार्थ, मध्यमान) तर अनेक गटासाठी त्यांचे वितरण प्रसामान्य संभव वक्रासारखेच येते आणि प्रसामान्य संभव वक्राच्याबरोबर मध्यभागी लोकसंख्येच्या सरासरीचे खरे प्रमाणक असते त्यास TM किंवा Mpop असे म्हणतात. म्हणजेच वास्तव मध्यमान किंवा लोकसंख्या मध्यमान !

लोकसंख्येची सांख्यिकी जशी प्रसामान्य संभव वक्राप्रमाणे विभाजित झालेली असते त्याचप्रमाणे सांख्यिकीची प्रमाणत्रुटीसुद्धा प्रसामान्य संभव वक्रा - प्रमाणेच विभाजित झालेली असते. म्हणून एकदा प्रमाणत्रुटी काढली की, आलेल्या सांख्यिकीत प्रमाणत्रुटीची तिप्पट मिळवून आणि तिप्पट वजा करून प्रमाणकाच्या दोन टोकाच्या मर्यादा ठरवितात. यालाच आपण प्रमाणकाचे विश्वासांतर (Confidence-Interval) असे म्हणतो. ते प्रमाणकाची किमान व कमाल किंमत दाखवते.

सांख्यिकीची प्रमाणत्रुटी काढण्यासाठी जी सूत्रे मोठ्या प्रमाणावर वापरली जातात. त्यातील मूलभूत संकेतचिन्हे पुढीलप्रमाणे -

N = गटातील व्यक्तींची संख्या

σ = प्रमाण विचलन

σ_M = मध्यमानाची प्रमाणत्रुटी

σ_{Mdn} = मध्यांकाची प्रमाणत्रुटी

Q = चतुर्थक विचलन

σ_σ = प्रमाण विचलनाची प्रमाणत्रुटी

σ_Q = चतुर्थक विचलनाची प्रमाणत्रुटी

r = सहसंबंध गुणांक.

σ_r = सहसंबंधाची प्रमाणत्रुटी

तसेच सांख्यिकीच्या प्रमाणत्रुटी काढण्यासाठी काही सूत्रे पुढीलप्रमाणे आहेत.

$$\sigma_M = \frac{\sigma}{\sqrt{N}}$$

$$\sigma_{Mdn} = \frac{१.८५८\,Q}{\sqrt{N}} = \frac{१.२५३\sigma}{\sqrt{N}}$$

$$\sigma_\sigma = \frac{०.७१\sigma}{\sqrt{N}}$$

$$\sigma_Q = \frac{१.१७Q}{\sqrt{N}} = \frac{०.७८६\sigma}{\sqrt{N}}$$

$$\sigma_r = \frac{(१-r)^2}{\sqrt{N}}$$

(चतुर्थक विचलन हे प्रमाण विचलनाच्या २/३ पट असते. त्यामुळे रूपांतर सूत्रे Q किंवा σ ह्यांच्या मदतीने काढता येतात. σ व Q यांचे परस्परांत रूपांतर करून बदलता येतात.)

एक गंमतीदार उदाहरण आता पाहू. एकोणिसाव्या शतकात एका संशोधकाने इंग्लिश लोकांची सरासरी उंची शोधण्यासाठी जे संशोधन केले त्यामध्ये त्याने ८'५८५ प्रौढ स्त्री-पुरुषांची उंची मोजली होती तेव्हा त्यांची सरासरी उंची ६७.४६ इंच इतकी आली. या गटाचे प्रमाण विचलन २.५७ इंच इतके आले. जर संशोधकाने त्या वेळी सर्व इंग्लिश स्त्री-पुरुषांची उंची मोजली असती तर इंग्लिश लोकांची सरासरी उंची ६७.४६ इंचच येऊ शकली असती काय ?

निष्कर्ष काढण्यासाठी त्यांनी पुढीलप्रमाणे आधारसामुग्रीचे विश्लेषण केले.

M = ६७.४६"   σ = २.५७"   N = ८५८५"

$$\sigma_M = \frac{\sigma}{\sqrt{N}} = \frac{२.५७}{\sqrt{८५८५}} = ०.०२८"$$

.९५ विश्वासांतरासाठी $M \pm १.९६\ \sigma_M$

= ६७.४६' ± १.९६ x ०.०२८

= ६७.४६' ± ०.०५"

= ६७.४१% ते ६७.५१%

.९९ विश्वासांतरासाठी ६७.४६ ± २.५८ σM

= ६७.४६' ± २.५८ x ०.०२८

= ६७.४६' ± ०.०७'

= ६७.३९% ते ६७.५३%

सांख्यिकीच्या दोन्ही टोकात पडणारा फरक एक दशांश इंच इतका क्षुल्लक आहे की, आपणांस ठामपणे असे सांगता येईल की, संशोधकाने शोधलेली इंग्लिश लोकांची सरासरी उंची ६७.४६' अगदी बरोबर आहे आणि सगळ्या लोकांची उंची मोजून सरासरी काढली असतील तरी ती ६७.४६' च आली असती किंवा तिच्या अगदी जवळपासची आली असती.

वर्णनात्मक आणि अनुमानात्मक सांख्यिकी म्हणजे काय ? हे तुम्ही मूलभूत सांख्यिकीमध्ये अभ्यासले आहेच. तुमच्या संशोधनातून मिळालेल्या आधारसामुग्रीच्या आधारे कोणते सांख्यिकी तंत्र वापरावयाचे हे निश्चित करावे लागते. सांख्यिकी मापनासाठी दोन प्रकारच्या चाचण्यांचा वापर केला जातो. त्याबाबतची माहिती आपण पुढे पाहू या.

६.० चाचण्यांचे प्रकार

संशोधनासाठी वापरल्या जाणाऱ्या चाचण्यांचे विभाजन पुढील दोन प्रकारांत होते.

६.१ परिमितीय चाचण्या (Parametric Test)

६.२ अपरिमितीय चाचण्या (Non-Parametric Test)

या चाचण्यांबाबतची तात्त्विक व तौलनिक माहिती आपण अगोदर समजावून घेऊ. त्यानंतर त्यांचा सविस्तर अभ्यास करू या !

परिमितीय चाचणी (Parametric Tests)	*अपरिमितीय चाचणी* (Non-Parametric Tests)
(१) मापन साधन निश्चित असते.	(१) मापन साधन निश्चित नसते.
(२) आधारसामुग्री अंतर किंवा गुणोत्तर श्रेणीत असते.	(२) आधारसामुग्री क्रमांकन किंवा नामांकन श्रेणीत असते.
(३) दोन गुणांकामधील अंतर सुस्पष्ट असते.	(३) दोन गुणांकामधील अंतर सुस्पष्ट नसते.
(४) आधारसामुग्रीचे हवे तितके सुस्पष्ट भाग करता येतात.	(४) आधारसामुग्रीचे भाग करता येत नाहीत. कारण त्यांच्या-तील फरक सुस्पष्ट नसतो.
(५) आधारसामुग्री संख्यात्मक आणि यथार्थ पद्धतीची असते.	(५) माहिती संख्यात्मक स्वरूपात मांडता येते परंतु ती यथार्थ पद्धतीची असतेच असे नाही.
(६) मापन वस्तुनिष्ठ असते.	(६) मापन व्यक्तिनिष्ठ असते.

कोष्टक १ : परिमितीय चाचणी आणि अपरिमितीय चाचणीतील फरक

या तुलनात्मक माहितीवरूनच तुम्हांला परिमितीय आणि अपरिमितीय चाचण्यांमधील फरक समजला असेलच. मग चला तर आता त्याबाबत आपण सविस्तर माहिती अभ्यासू या !

६.१ परिमितीय चाचण्या (Parametric Tests)

विद्यार्थ्याने प्राप्त केलेले यश, विषयाबाबतची अभिरूची, कल इत्यादी निश्चित करताना आंतरिक मापन पद्धतीचा वापर करतात. कारण यात सर्व घटकांमध्ये समानता, लहान-मोठेपणा असतो. सर्व घटकांमधील अंतराची निश्चित कल्पना येते. दोन घटकांतील फरकाचा आकारही ज्ञात असतो. त्यामुळे गटांची तुलना करण्यासाठी या चाचण्यांचा वापर केला जातो.

या चाचण्यांमध्ये खालील गोष्टी गृहीत धरल्या जातात.

(१) चले ही आंतरिक / गुणोत्तर मापन पद्धतीतील असतात. (चलांबाबतच्या अधिक माहितीसाठी संशोधन पद्धतीच्या पुस्तकाचे सविस्तर वाचन करा.)

(२) जनसंख्येचे विभाजन हे प्रसामान्य स्वरूपाचे असते.

(३) न्यादर्शामधील एका एककाची निवड दुसऱ्या एककाच्या निवडीवर अवलंबून नसते. निवड होण्याची सर्वांना समान संधी असते.

या चाचण्यांबाबतची सविस्तर माहिती आता आपण पाहू.

(१) क्रांतिक गुणोत्तर/टी-चाचणी (Critical Ratio/T-test ~~for Same Measures~~)

ज्यावेळी संपूर्ण लोकसंख्येसाठी एखादा निष्कर्ष किंवा प्रमाणित सांख्यिकी मांडायची असते तेव्हा संदर्भित लोकसंख्येतून अतिशय काटेकोरपणे एकापेक्षा अधिक न्यादर्श निवडले जातात. त्याचे मापन केले जाते. त्याआधारे समान सांख्यिकी काढल्या जातात. सर्व न्यादर्शांच्या बाबतीत एक प्रकारच्या सांख्यिकीची किंमत एकसारखी येत नाही. $M_1 \# M_2$ त्यामध्ये थोडा फार फरक आढळतो. अशा वेळी हा फरक खरा की खोटा ? हे संशोधकाने पडताळून पाहणे अत्यावश्यक असते. त्याशिवाय सांख्यिकी मापनाची अचूकता अजमावताच येणारच नाही. अनेक न्यादर्श हे जनसंख्येचे वास्तव प्रातिनिधिक असतील आणि त्यांची नुसती मध्यमाने काढली तरी शून्य परिकल्पनेप्रमाणे -

$M_1 - M_2 = 0, \quad M_2 - M_3 = 0, \quad M_1 - M_3 = 0$ असे गृहीत धरावे लागते. परंतु या ठिकाणी न्यादर्श हे समतुल्य नसतीलसुद्धा ! त्यामुळे फरक येणारच पण मध्यमानातील हा फरक अल्प व दुर्लक्षणीय आहे की सार्थ आणि लक्षणीय ठरण्याइतका मोठा आहे हे ठरविण्यासाठी समान सांख्यिकीमधील फरकांची विश्वसनीयता आणि सार्थकता पडताळून पाहावी लागते.

साधारणपणे सांख्यिकी मापन शोधताना तीन प्रमाणके अतिशय महत्त्वाची असतात. ती म्हणजे मध्यमान, प्रमाण विचलन आणि सहसंबंध गुणक आणि त्यांच्याबाबतीत येणारा फरक खरा आहे की खोटा ? या फरकांची प्रमाणत्रुटीचा विचार करूनच फरकाची सत्यता पडताळावी लागते.

मध्यमानातील फरकांची विश्वसनीयता व वैधता पडताळणी यासाठी काही सोपे संकेत लक्षात ठेवावेत.

$M_1 - M_2 = D_M$ किंवा D- दोन मध्यमानातील फरक

σ_{DM} - मध्यमानातील फरकाची प्रमाणत्रुटी

$$\sigma_{DM} = \sqrt{\sigma M_1^2 + \sigma M_2^2}$$

σ_{M1} = पहिल्या मध्यमानाची (M_1) ची प्रमाणत्रुटी

σ_{M2} = दुसऱ्या मध्यमानाची (M_2) ची प्रमाणत्रुटी

ही गोष्ट आपण एका उदाहरणाने समजावून घेऊ.

संशोधकाने निवडलेल्या अमूर्त विमर्शनिच्या संदर्भात बारावीच्या वर्गातील ८३ मुले आणि ९५ मुलींच्या गटाचे मध्यमाने ही ३०.९२ आणि २९.२१ आणि प्रमाणविचलने ७.८१ आणि ११.५६ आहेत तर मुला-मुलींच्या मध्यमाने आढळणारा फरक लक्षणीय आहे का ?

लिंग	N	M	σ
मुले	८३	३०.९२	७.८१
मुली	९५	२९.२१	११.५६

$$\therefore \sigma_{DM} = \sqrt{\sigma M_1^2 + \sigma M_2^2}$$

$$= \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{N_1} + \frac{\sigma_2^2}{N_2}}$$

$$= \sqrt{\frac{(७.८१)^2}{८३} + \frac{(११.५६)^2}{९५}}$$

$$= \sqrt{२.१४} = १.४६$$

मध्यमानातील फरकाची प्रमाणत्रुटी ही १.४६ आहे. मुले आणि मुली यांच्या मध्यमानातील वास्तव फरक D_M = ३०.९२-२९.२१ = १.७१ इतका आहे. म्हणून -

क्रांतिक गुणोत्तर CR =

$$= \frac{D_M}{\sigma_{DM}} = \frac{१.७१}{१.४६} = १.१७$$

जर क्षेत्रफळविषयक कोष्टकावरून १.१७σ पर्यंत दोन्ही बाजूला मिळून ३८% x २ = ७६% इतके क्षेत्रफळ येते. म्हणजे शंभर प्रयोग केले तर ७६ वेळा येणारा मध्यमानातील फरक खरा येईल तर २४ वेळेला तो योगायोगाने किंवा अपघाताने येईल.

कोणताही फरक खरा ठरण्यासाठी किमान ९५% वेळा तो खराखुरा यावा लागतो आणि पाच वेळा तो योगायोगाने किंवा अपघाताने यावा लागतो. येथे तसे घडलेले नाही. याचा अर्थ फरक खरा व लक्षणीय मानता येणार नाही तर तो शून्य परिकल्पनेप्रमाणे योगायोगाने आलेला आहे असेच समजावे लागेल. यावरून आपण असा निष्कर्ष काढू शकू की, **(संबंधित क्षमतेच्या (चाचणीतील) अमूर्त विमर्शनेबाबतीत मुला-मुलींमध्ये खराखुरा फरक आढळून येत नाही. जेव्हा फरक दिसतो तेव्हा तो न्यादर्श निवडीतील चुका आणि मापनातील चुका यांमुळे आलेला आहे.**

दोन गटांच्या मध्यमानातील फरक खरा की खोटा हे पाहण्यासाठी परिमितीय चाचण्यांमध्ये क्रांतिक गुणोत्तर, टी चाचणी, एकमार्गी - द्विमार्गी प्रसरण विश्लेषणाचा वापर केला जातो. त्याचप्रमाणे अन्य प्रगत सांख्यिकीचा वापर केला जातो. न्यादर्शातील संख्या ३० पेक्षा कमी असेल तर टी-चाचणीचा वापर केला जातो. तशी टी-चाचणी ३० पेक्षा जास्त संख्येच्या न्यादर्शासाठीही वापरता

येते. मात्र न्यादर्शातील संख्या ३० पेक्षा जास्त असेल तरच क्रांतिक गुणोत्तराचा वापर केला जातो. पण टी चाचणी मात्र कोणत्याही प्रकारच्या न्यादर्शासाठी वापरता येते. ते t गुणोत्तरच असते.

(१) क्रांतिक गुणोत्तराची किंमत जर ± १.९६ किंवा त्यापेक्षा जास्त आली तर मध्यमानातील फरक हा सार्थ आणि विश्वसनीय असतो. त्यामुळे सांख्यिकीचे रूपांतर लोकसंख्येच्या प्रमाणकात होऊ शकत नाही. संशोधकाला प्रयोग / संशोधन पुन्हा नव्याने करावे लागते. क्रांतिक गुणोत्तर (CR) ची किंमत ± २.५८ किंवा त्यापेक्षा जास्त आली तर फरक हा खूपच लक्षणीय, वैध आणि विश्वसनीय मानला जातो आणि त्यामुळे संशोधनासाठी निवडलेला न्यादर्श व सांख्यिकी त्याज्य ठरते. ते सांख्यिकी प्रमाणनित्यके होण्यास उपयुक्त नसतात.

(२) क्रांतिक गुणोत्तर ± १.९६ येते त्यावेळी येणारा फरक हा ९५% वेळा वैध आणि विश्वसनीय असतो आणि फक्त ५% वेळा तो योगायोगाने येत असतो. म्हणून फरक खरा असतो तर क्रांतिक गुणोत्तर जेव्हा २.५८ येते तेव्हा येणारा फरक ९९% वेळा खरा असतो आणि १% वेळा तो योगायोगाने येत असतो. म्हणून फरक अतिशय लक्षणीय व सार्थ मानला जातो.

(३) जेव्हा क्रांतिक गुणोत्तर १.९६ पेक्षा कमी येते तेव्हा येणारा फरक ९५% पेक्षा कमी वेळा खरा आणि ५% टक्क्यांपेक्षा जास्त वेळा योगायोगाने आलेला म्हणून तो खोटा असतो.

फरकाच्या सार्थकतेसाठी जे दोन सार्थकता स्तर निश्चित केलेले आहेत, त्यानुसार फरक खरा ठरविण्यासाठी त्याची किंमत ९५% वेळा खरी यावीच लागते. त्यापेक्षा कमी वेळा आलेला फरक मान्य न करता दुर्लक्षणीय म्हणून सोडून दिला जातो व शून्य परिकल्पना मान्य केली जाते.

ज्यावेळी जनसंख्येतून निवडलेले न्यादर्श पुरेसे मोठे असतात म्हणजेच $N > 30$ असते त्यावेळेला फरकाची सार्थकता पडताळण्यासाठी क्रांतिक गुणोत्तराचा वापर केला जातो आणि फरक किती टक्के वेळा खरा येतो हे पाहण्यासाठी प्रसामान्य संभव वक्राच्या क्षेत्रफळविषयक कोष्टकाचा वापर केला जातो. हे कोष्टक परिशिष्ट 2 मध्ये देण्यात आलेले आहे. कारण गटांचे वितरण प्रसामान्य संभव वक्राप्रमाणे झालेले असते परंतु जेव्हा संशोधनासाठी घ्यावयाचे न्यादर्श उपलब्ध परिस्थितीनुसार घ्यावे लागतात, संशोधन अतिशय निकडीचे असते तेव्हा मिळतील ते छोटे न्यादर्श संशोधनासाठी घ्यावे लागतात आणि बहुतेक वेळा ते $N < 30$ असे छोट्या गटाच्या स्वरूपाचे असतात त्यावेळी मात्र एक महत्त्वपूर्ण गोष्ट लक्षात ठेवावी लागते. ती म्हणजे छोट्या गटाचे वितरण प्रसामान्य संभव वक्राप्रमाणे नसून चिपिटशिखरी वक्रासारखे असते. अशा वेळी फरकांची सार्थकता पाहण्यासाठी क्रांतिक गुणोत्तर उपयुक्त ठरत नाही. त्यासाठी आपणांस टी चाचणीचाच वापर करावा लागतो. यालाच फरकाची टी चाचणी असेही म्हणतात. ही चाचणी सर्वप्रथम डब्ल्यू. एम. गॅरेट यांनी तयार केली. ते स्टुडंट या टोपण नावाने लेखन करीत असत आणि फरकाची सार्थकता ठरविण्यासाठी टी गुणोत्तर किती आले पाहिजे, हे निश्चित करण्यासाठी त्यांनी टी गुणोत्तराचे स्वतंत्र कोष्टक तयार केलेले आहे. त्यामध्ये प्रथम स्वाधीनता मात्रा निश्चित करून तिच्यानुसार ५% शक्यतेसाठी ०.०५ सार्थकता स्तर आणि १% सार्थकतेसाठी ०.०१ सार्थकता स्तर ह्यासाठी टी च्या किंमती किती आल्या पाहिजेत, हे दिलेले असते आणि आपले गुणोत्तर दिलेल्या किंमतीपेक्षा किंवा तिच्यापेक्षा जास्त आले तरच फरक सार्थ मानला जातो. अन्यथा तो दुर्लक्षणीय

ठरवून सोडून दिला जातो. student मधील t हे अक्षर गुणोत्तरासाठी वापरले आहे.

टी गुणोत्तराच्या किंमती क्रांतिक गुणोत्तरापेक्षा नेहमी जास्त असतात. टी गुणोत्तराचे कोष्टक हे मोठे न्यादर्श आणि त्यांचे क्रांतिक गुणोत्तर यांनासुद्धा वापरता येते पण प्रसामान्य संभव वक्राचे क्षेत्रफळविषयक कोष्टक टी गुणोत्तरासाठी वापरता येत नाही. टी व क्रांतिक गुणोत्तर काढण्याचे सूत्र मात्र समानच आहेत.

$$C.R. = t\text{- गुणोत्तर} = \frac{D_M}{\sigma_{DM}}$$

टी - चाचणी किंवा क्रांतिक गुणोत्तराचा वापर करून संशोधनातील निष्कर्ष काढता येतात.

सरावासाठी स्वाध्याय

क्रांतिक गुणोत्तर व टी चाचणीचा केव्हा वापर कराल ?

कधी कधी एकाच न्यादर्शावर पुन्हा पुन्हा प्रयोग केले जातात किंवा समतुल्य न्यादर्श निवडले जातात. अशा वेळी त्या न्यादर्शाच्या आधारसामुग्रीमध्ये निश्चित असा सहसंबंध असतो आणि म्हणून अशा संशोधनामध्ये मध्यमानातील फरकांची प्रमाणत्रुटी काढताना मूळ सूत्रात थोडा फरक केला जातो. एकाच गटावर प्रयोग / संशोधन करताना किंवा समतुल्य गट असताना काही काळजी घ्यावी लागते.

क्रांतिक गुणोत्तर अथवा टी - गुणोत्तर काढताना सहसंबंध गुणकाचा विचार केला नाही तर प्रमाणत्रुटी फुगत राहते. त्यामुळे चुकीचे उत्तर देण्याची शक्यता असते.

ज्यावेळेला परस्परसंबंधित अशाप्रकारची मध्यमाने असतात आणि एकल गट अभिकल्प, समतुल्य गट अभिकल्प यामध्ये अशी मध्यमाने येतात त्यावेळी मध्यमानातील फरकांची प्रमाणत्रुटी काढताना त्या गटांच्या बाबतीत परस्परसंबंध, पूर्वचाचणी आणि उत्तरचाचणी किंवा दोन्ही उत्तरचाचणीतील समानता लक्षात घ्यावी लागते. अन्यथा मध्यमान फरकाची प्रमाणत्रुटी वाजवीपेक्षा जास्त मोठी होऊन सार्थ फरक निरर्थक ठरण्याची जास्त शक्यता असते.

त्या जोडीला - $N_1 = N_2$ असणे आवश्यक असते.

एका उदाहरणाने ही गोष्ट आपण समजावून घेऊ या.

एका संशोधकाने *"क्रमान्वित अध्ययन पद्धती आणि अग्रत संघटकाचा वापर करून विकसित केलेल्या स्वयं-अध्यापन साहित्याची परिणामकारकता"* अजमावण्यासाठी दोन समतुल्य गटांची निवड केली.

प्रत्येक गटामध्ये ६४ सदस्य होते. पहिल्या गटाचे मध्यमान ४५ आणि प्रमाण विचलन ६ आले तर दुसऱ्या गटाचे मध्यमान ५० आणि प्रमाण विचलन ५ आले. गटांच्या बाबतीत प्रारंभिक आणि अंतिम चाचण्यांमधील सहसंबंध ०.६० असेल तर या दोन्ही गटांची मध्यमाने एकमेकांपेक्षा वेगळी आहेत का ? (एक गट दुसऱ्यापेक्षा श्रेष्ठ / कनिष्ठ आहे का ?)

$$D_M = M_1 - M_2 = ५० - ४५ = ५$$

$$\sigma_{M_1} = \frac{\sigma_1}{\sqrt{N_1}} = \frac{६}{\sqrt{६४}} = \frac{६}{८} = ०.७५$$

$$\sigma_{M_2} = \frac{\sigma_2}{\sqrt{N_2}} = \frac{५}{\sqrt{६४}} = \frac{५}{८} = ०.६३$$

$$\sigma_{DM} = \sqrt{\sigma M_1^2 + \sigma M_2^2 - 2\sigma M_1, \sigma M_2\ r_{12}}$$

$$= \sqrt{(०.७५)^२ + (०.६३)^२ - २ \times ०.७५ \times ०.६३ \times ०.६०}$$

$$= ०.६३$$

ह्या उदाहरणाचा अन्वयार्थ आपल्याला दोन पद्धतीने लावता येईल. तो म्हणजे क्रांतिक गुणोत्तर किंवा टी-चाचणी वापरून ! (कारण गटामध्ये ६४ व्यक्ती आहेत.)

$$CR = \frac{D_M}{\sigma_{DM}} = \frac{५}{०.६३} = ८$$

या ठिकाणी क्रांतिक गुणोत्तराची आलेली किंमत ही १.९६ आणि २.५८ पेक्षा कितीतरी जास्त आहे. याचा अर्थ शंभरातील ९९ पेक्षा अधिक वेळा येणारा फरक हा खरा फरक आहे आणि एकापेक्षाही कमी वेळा येणारा फरक हा योगायोगाने आलेला आहे. म्हणून अग्रत संघटकाच्या साहाय्याने विकसित करण्यात आलेले स्वयं-अध्यापन साहित्य हे क्रमान्वित अध्ययन साहित्यापेक्षा अधिक परिणामकारक आहे, हे येथे सिद्ध होते.

हेच उदाहरण टी-चाचणीनुसारही सोडविता येते.

CR = t- ratio = ८

∴ या ठिकाणी टी-गुणोत्तरही ८ येईल आणि स्वाधीनता मात्रा = $N_1 + N_2$- १ - १ = ६४ + ६४ - २ = १२६ इतकी येईल.

t- कोष्टकावरून स्वाधीनता मात्रा १२६ असताना ०.०५ सार्थकता स्तर १.९८ आणि ०.०१ सार्थकता स्तराची किंमत २.६१ आहे. संशोधकाचे टी-गुणोत्तर ८ हे ०.०५ आणि ०.०१ या दोन्ही सार्थकता स्तरापेक्षा खूपच मोठे असल्यामुळे पडणारा फरक हा सार्थ वास्तव व लक्षणीय आहे, हे सुस्पष्टपणे लक्षात येते आणि अग्रत संघटक स्वयं-अध्यापन साहित्य हे क्रमन्वित अध्ययन साहित्यापेक्षा परिणामकारक आहे हे सिद्ध होते.

सरावासाठी स्वाध्याय

दूरशिक्षणामध्ये प्रत्यक्ष कृतिसत्राद्वारे आणि आभासी वर्गाद्वारे संमंत्रण परिणामकारकतेचा तौलनिक अभ्यास एका संशोधकाने केला होता. त्यासाठी त्याने दोन समतुल्य गटांची निवड केली. प्रत्येक गटात 50 विद्यार्थी होते. पहिल्या गटाचे मध्यमान 70 आणि प्रमाण विचलन 5 आले तर दुसऱ्या गटाचे मध्यमान 75 आणि प्रमाण विचलन 6 आले आणि या दोन गटांतील सहसंबंध 0.50 हे तर दोन गटांमध्ये पडणाऱ्या फरकाची वैधता T-चाचणीद्वारे शोधून त्याचा अन्वयार्थ लिहा.

(२) मध्यमान आणि प्रमाण विचलनाच्या साहाय्याने समतुल्य न्यादर्शांची निवड

संशोधनामध्ये तंतोतंत समतुल्य आणि सारख्या संख्येचे आणि एकमेकांचे प्रतिबिंब असलेले न्यादर्श सहसा मिळत नाहीत. म्हणून संशोधकाला कोणत्यातरी एका महत्त्वाच्या नियंत्रित चलाबाबत (दोन गटांचे मध्यमान आणि प्रमाण विचलन) दोन गट एकसारखे करावे लागतात. प्रायोगिक चलापेक्षा गटांची जोडी लावण्यासाठी वापरलेले चल हे जरी वेगळे असले तरी ते प्रायोगिक चलाशी कमी-जास्त प्रमाणात संबंधित मात्र असावे लागतात. या ठिकाणी दोन समान व्यक्तींची जोडी करून त्यांची दोन न्यादर्शात विभागणी करण्याची गरज नसते. तसेच दोन्ही गटांतील जनसंख्या तंतोतंत एकसारखी असण्याचीही गरज नसते. $N_1 \neq N_2$ तरीपण दोन्ही गटातील जनसंख्येमध्ये फार मोठा फरक असून चालत नाही. समजा, Y हा असा चल आहे की, ज्याच्याबाबतीत दोन्ही गटाची मध्यमाने आणि प्रमाण बिचलने जवळपास एकसारखीच आहेत आणि X हे असे स्वाश्रयी चल आहे की त्याबाबतीत दोन गटांच्या मध्यमानात जाणवण्याइतका फरक आढळून आला आहे. तर हा फरक सार्थ आहे की निरर्थक आहे हे शोधण्यासाठी आपणांस मध्यमानातील फरक D_M बरोबरच मध्यमानातील फरकाची प्रमाणत्रुटीही σ_{DM} काढावी लागेल. येथे फरकाची प्रमाणत्रुटी काढण्यासाठी पुढील सूत्र वापरले जाते.

$$\sigma_{DM} = \sqrt{(\sigma Mx_1^2 + \sigma Mx_2^2)(1-r^2xy)}$$

एका उदाहरणाने ही गोष्ट आपल्या सहज लक्षात येईल.

नेहमीच्या शाळा (बौद्धिक शाळा) आणि तांत्रिक शाळा यांमध्ये शिकणाऱ्या विद्यार्थ्यांच्या यांत्रिक क्षमतेत खरोखर फरक असतो का ? हे संशोधकाला पडताळून पाहावयाचे होते म्हणून त्याने प्रथम बुद्धिमत्ता चाचणी दिली. दोन्ही गटाची सरासरी बुद्धिमत्ता व बुद्धिमत्तेचे प्रमाण विचलन जवळपास सारखे होईल असे गट निवडले आणि नंतर त्यांना यांत्रिक क्षमता चाचणी देऊन सांख्यिकी माहिती मिळविली.

	नेहमीच्या शाळा	तांत्रिक शाळा
विद्यार्थी संख्या (N)	१२५	१३७
बुद्धिमापन चाचणी (Y) मध्यमान (M)	१०२.५०	१०२.८०
बुद्धिमापन चाचणीचे प्रमाण विचलन	३३.६५	३३.६२
यांत्रिक क्षमता (X) चाचणीचे मध्यमान	५१.४२	५४.३८
यांत्रिक चाचणीचे क्षमता प्रमाण विचलन (σ)	६.२४	७.१४

बुद्धिमापन चाचणी आणि यांत्रिक क्षमता चाचणीतील सहसंबंध गुण (γ) ०.३०

$\therefore D_M$ = ५४.३८ - ५१.४२ = २.९६

$$\therefore \sigma_{DM} = \sqrt{\frac{(\sigma_1^2)}{N_1} + \frac{(\sigma_2^2)}{N_2} - (1-\gamma xy2)}$$

$$= \sqrt{\frac{(६-२४)^२}{१२५} + \frac{(७.१४)^२}{१३७} - (१ - (०.३०)^२)}$$

$$= ०.७९$$

$$= \therefore CR / t\text{- Ratio} = \frac{D_M}{\sigma_{DM}} = \frac{२.९६}{०.७९}$$

= ३.७५

ही द्विपुच्छ चाचणी आहे. येथे d*f* ची किंमत

d*f* = [(१२५ - १)+१३७-१)] = १२४+१३६

= २६०

$\therefore$ कोष्टकाची 0.05 स्तरासाठी t / CR ची किंमत 1.97 आणि 0.01 स्तरासाठी 2.59 आहे. संशोधनातून आलेले C. R. t- गुणोत्तर 3.75 हे दोन्ही स्तराच्या किंमतीपेक्षाही मोठे आहे. म्हणजेच 100 प्रयोगात 99 पेक्षाही जास्त वेळा फरक खरा असेल म्हणून शून्य परिकल्पनेचा त्याग करून दोन गटांत पडणारा फरक सार्थ व विश्वसनीय मानला पाहिजे आणि समान बुद्धिमत्ता असतानाही तांत्रिक शाळेतील विद्यार्थी सर्वसाधारण शाळेतील विद्यार्थ्यांपेक्षा

तांत्रिक क्षमतेच्याबाबतीत निश्चितपणे जास्त प्रगत किंवा पुढारलेले असतात, असे संशोधकाने हमखासपणे निदान केले पाहिजे.

(३) एकपुच्छ चाचणी आणि द्विपुच्छ चाचणी (One Tailed test and Two Tailed test)

साधारणपणे ज्यावेळी जनसंख्येतील व्यक्ती-वैशिष्ट्ये मोजावयाची असतात. जसे बुद्धिमत्ता, उंची, वजन वगैरे तेव्हा दोन गटांच्या मध्यमानामध्ये पडणारा फरक हा अधिक किंवा वजा असू शकतो. परिणामी पहिल्या न्यादर्शानंतरच्या न्यादर्शाचे मध्यमान हे पहिल्या मध्यमानापेक्षा जास्त किंवा कमी येऊ शकते. त्यामुळे मध्यमानातील फरकाची सार्थकता पाहण्यासाठी आपणांस शून्य परिकल्पनेचाच वापर करावा लागतो.

अधिक, वजा फरक दाखविणारे मापन ज्या चाचणीमुळे येते तिला द्विपुच्छ चाचणी असे म्हणतात. या चाचणीमध्ये विभाजन हे दोन्ही अर्ध्यामध्ये घडू शकते. उदाहरणार्थ, प्रावीण्य चाचण्या, मानसिक कसोट्या, शारीरिक मापने, इत्यादी.

पण कधी कधी मध्यमानात पडणारा फरक हा निश्चितपणे अधिक (वाढ) किंवा वजा (घट) अशा स्वरूपाचा असेल हे ठामपणे अगोदरच सांगता येते. उदाहरणार्थ, सरासरी बुद्धिमत्तेच्या विद्यार्थ्यांना सखोल मार्गदर्शन केले तर पुढच्या चाचणीत त्यांच्या प्राविण्यात घट न होता हमखास वाढच होईल किंवा वर्गातील ज्या विद्यार्थ्यांचे सातत्याने कुपोषण झाले तर त्यांच्या सरासरी वजनात घटच होईल. परीक्षेसाठी निश्चित केलेल्या वेळेपेक्षा जास्त वेळ उत्तरे लिहिण्याची संधी दिली तर विद्यार्थ्यांच्या प्रावीण्यात नक्कीच वाढ होईल. म्हणजे दोन मध्यमानात पडणारा फरक हा निश्चितपणे धन किंवा ऋण यांपैकी एकाच प्रकारचा असेल असे अगोदरच निश्चित होते. ह्याचा अर्थ असा की,

फरकाच्या बाबतीत प्रसामान्य संभव वक्रातील वरचा / खालचा यांपैकी एक अर्ध पूर्णपणे बंद असतो. त्यामुळे पडणारा फरक दोन्हीपैकी एकाच अर्धात पडतो अशा चाचणीला एकपुच्छ चाचणी असे म्हणतात.

या ठिकाणी फरकाची दिशा अगोदरच निश्चित झाल्यामुळे शून्य परिकल्पना न वापरता दिशांकित परिकल्पना (Directional Hypothesis) वापरावी लागते.

त्यामुळे फरकाची सार्थकता ठरविण्यासाठी जे किमान ९५% क्षेत्रफळ व्यापावे लागते त्यापैकी बंदिस्त अर्ध्यातील ५०% आणि मुक्त अर्ध्यातील ४५% क्षेत्रफळ घ्यावे लागते. द्विपुच्छ चाचणीमध्ये मात्र ते प्रत्येक अर्ध्यातील ४७.५०% इतके घ्यावे लागते. क्षेत्रफळविषयक कोष्टकावरून ४५% क्षेत्रफळासाठी १.६५ इतके क्रांतिक गुणोत्तर / टी-गुणोत्तर फरक सार्थ होण्यासाठी पुरेसे ठरते. (द्विपुच्छ चाचणीप्रमाणे १.९६ असण्याची गरज नसते.)

तसेच फरक अतिशय लक्षणीय ठरण्यासाठी ९९% क्षेत्रफळ व्यापण्यासाठी मुक्त अर्ध्यात फक्त ४९% टक्केच क्षेत्रफळ असावे लागते. (द्विपुच्छ चाचणीमध्ये मात्र ते प्रत्येकी ४९.५% असावे लागते.) परिणामी एकपुच्छ चाचणीत ०.०१ सार्थकता स्तरासाठी क्रांतिक गुणोत्तर / टी - गुणोत्तर २.३३ पुरेसे ठरते. म्हणूनच एकपुच्छ चाचणीमध्ये क्रांतिक गुणोत्तर १.६६ आले तरी फरक सार्थ आणि लक्षणीय ठरतो, हे लक्षात ठेवले पाहिजे. यासाठी दिशांकित परिकल्पनेचा वापर केला जातो. त्याबाबतचे सविस्तर स्पष्टीकरण संकल्पनांमध्ये केलेले आहे.

ज्या विद्यार्थ्यांचे संशोधनाचे विषय पुढीलप्रमाणे असतील त्यांना एकपुच्छ चाचणीचा जरूर वापर करावा लागेल.

★ विज्ञान अध्यापनात दृक्-श्राव्य साधनांचा परिणामकारक वापर केल्यास विद्यार्थ्यांचे अध्ययन अधिक प्रभावी होते.

★ इतिहास विषयातील ऐतिहासिक स्थळांची माहिती देण्यासाठी क्षेत्रभेटीचा वापर केल्यास विद्यार्थ्यांचे आशय आकलन अधिक होते.

★ दूरस्थ शिक्षणप्रणालीमध्ये स्वयं-अध्ययन साहित्यामुळे प्रत्येक विद्यार्थ्याचे स्वयंगतीने परिणामकारक अध्ययन होते.

एका संशोधकाने आपल्या संशोधनासाठी पुढीलप्रमाणे संशोधन विषय घेतलेला होता.

"पर्यवेक्षणासह परीक्षा आणि विनापर्यवेक्षण परीक्षा यांतील गैरप्रकारात फरकाचा अभ्यास."

या संशोधनासाठी त्यांनी मुलांचे दोन गट निवडले होते. एका गटाला पर्यवेक्षित परिस्थितीमध्ये चाचणी देण्यात आली तेव्हा गटाचे मध्यमान ६२ आणि प्रमाण विचलन १० इतके आले. दुसऱ्या गटाला मात्र विनापर्यवेक्षण परिस्थितीत तीच चाचणी देण्यात आली तेव्हा त्यांचे मध्यमान ८७ आणि प्रमाणत्रुटी १० इतकी आली तर दुसऱ्या गटाने चाचणी सोडविताना गैरप्रकार केले असे निश्चित सांगता येईल का ?

$M_1 = ६२ \quad M_2 = ८७$

$\sigma_1 = \sigma_2 = १०$

येथे N ची किंमत दिलेली नाही. त्यामुळे आपणांस σ हाच σ_{DM} मानून घ्यावा लागेल.

$D_M = ८७ - ६२ = २५$

$$CR = \frac{D_M}{\sigma_{DM}} = \frac{२५}{१०} = २.५$$

ही किंमत ०.०१ सार्थकता स्तर (२.३५) पेक्षाही जास्त असल्यामुळे १०० पैकी ९९ पेक्षाही अधिक वेळा फरक खरा व लक्षणीय असण्याची खात्री आहे. यावरून आपण असा ठाम निष्कर्ष काढू शकतो की, दुसऱ्या गटाने चाचणी सोडविताना भरपूर गैरप्रकार केलेले आहेत. त्यामुळे त्यांची संपादणूक मोठ्या प्रमाणात वाढली आहे.

सरावासाठी स्वाध्याय

तुमच्या संशोधनामध्ये तुम्ही एकपुच्छ की द्विपुच्छ चाचणी यांपैकी कोणत्या चाचणीचा वापर करणार ते सोदाहरण लिहा.

(४) प्रसरण / प्रचलन विश्लेषण (Analysis of Variance - ANOVA)

आतापर्यंत आपण लोकसंख्येतून निवडलेले एक किंवा दोन न्यादर्श त्यांच्या समान सांख्यिकीमधील फरक, इत्यादी गोष्टींचा विचार केला पण अनेक वेळा संशोधनात दोनापेक्षा जास्त न्यादर्श घेऊन त्यांच्यावर एकाच वेळी प्रयोग किंवा संशोधन करावे लागते. साधारणपणे कुठल्याही न्यादर्शाच्या संदर्भात मध्यमान आणि प्रमाण विचलन या दोन सांख्यिकी अत्यावश्यक म्हणून काढल्या जातातच. अनेक न्यादर्शांच्या मध्यमानातील फरक सार्थ आहे की निरर्थक हे ठरविण्यासाठी जर टी-चाचणी वापरावयाची म्हटली तर एका वेळी फक्त दोनच न्यादर्शांच्या मध्यमानाचा विचार करता येऊ शकेल. अनेक न्यादर्शांच्या मध्यमानाची एकाच वेळी तुलना करता येणार नाही अशा वेळी प्रसरण विश्लेषण तंत्र वापरले जाते. हे विश्लेषण दोन किंवा दोनापेक्षा

अधिक, परस्परसंबंधित नसलेल्या, न्यादर्शाबाबतीत वापरले तर त्याला प्रसरण विश्लेषण (अॅनोव्हा) असे म्हणतात. पण ते परस्परसंबंधित अशा न्यादर्शाबाबतीत वापरले गेले तर त्याला सहप्रसरण विश्लेषण - अन्कोव्हा (Analysis of Co-Variance - ANCOVA) असे म्हणतात. या ठिकाणी एकाच न्यादर्शावर अनेक वेळा प्रयोग केले जातात किंवा अनेक समतुल्य न्यादर्श घेऊन त्यांच्यावर प्रयोग केले जातात. यात एकच आश्रयी चल असते. ज्यावेळी संशोधनामध्ये दोन आश्रयी चले असतात त्यावेळी द्विमार्गी प्रसरण विश्लेषणाचा (Two Way Anova) वापर केला जातो. पण ज्यावेळी संशोधनामध्ये तीन किंवा त्यापेक्षा जास्त आश्रयी चले असतात त्यावेळी बहुचल प्रसरण विश्लेषणाचा (Multi-variate analysis of variance MANOVA) वापर केला जातो. प्रसरण विश्लेषणाचे प्रकार, चले आणि न्यादर्शाबाबतची माहिती थोडक्यात आकृती ३ मध्ये दिलेली आहे.

प्रसरण विश्लेषण

- एकमार्गी प्रसरण विश्लेषण (One Way Anova)
- द्विमार्गी प्रसरण विश्लेषण (Two Way Anova)
- बहुचल प्रसरण विश्लेषण (MANOVA)
- सहप्रसरण विश्लेषण (ANCOVA)

आकृती ३ : प्रसरण विश्लेषण प्रकार

सांख्यिकीमध्ये प्रसरण दर्शविण्यासाठी प्रमाण विचलनाच्या वर्गाचा वापर करतात त्यालाच व्हेरिअन्स (Variance) म्हणतात व ते σ^2 ने दाखवतात. प्रमाण विचलनापेक्षा हे प्रमाणक अधिक उपयुक्त आहे. कारण त्यांचे विश्लेषण करता येते. विश्लेषणावरून त्याआधारे चलासंबंधी निष्कर्ष काढता येतात.

प्रसरण विश्लेषण करताना तीन प्रकारच्या गोष्टी आपणांस मिळू शकतात. त्या म्हणजे -

(१) दोन किंवा दोनापेक्षा जास्त वितरणाच्या मध्यमानात असलेल्या फरकामुळे निर्माण झालेले प्रसरण (SS_M) कळू शकते.

(२) दोन किंवा दोनपेक्षा जास्त वितरणातील फरकामुळे निर्माण झालेले प्रसरण / प्रचलन (SS_W) कळू शकते.

(३) न्यादर्शामधील त्रुटी आणि मापनातील त्रुटी यामुळे निर्माण झालेली त्रुटी प्रसरण / प्रचलन (e) कळू शकते.

एकूण प्रसरण / प्रचलन = दोन गटांच्या मध्यमानातील फरकामुळे आलेले प्रसरण + दोन गटांतील वितरणातील फरकामुळे आलेले प्रसरण + त्रुटी प्रसरण

हेच थोडक्यात $\sigma^2 = SS_M + SS_W + e$

ह्या सूत्राने लिहिले जाते.

(अ) एकमार्गी प्रसरण विश्लेषण

जेव्हा दोनपेक्षा अधिक न्यादर्श असतात त्यांची मध्यमाने काढलेली असतात. अशा वेळी त्या मध्यमानांची एकदम तुलना करून मध्यमानामध्ये पडणारा फरक सार्थ आहे की नाही, एवढेच नाही तर किती मध्यमानातील फरक हा सार्थ आहे आणि किती मध्यमानामधील फरक सार्थ नाही हेसुद्धा ठरविता येते. त्यासाठी जे तंत्र वापरले जाते त्याला 'F-गुणोत्तर' असे म्हणतात. कधी कधी त्याला 'F test' असेही म्हणतात.

हे आपण एका उदाहरणाने समजावून घेऊ.

• *एक संशोधक एकाच आशयाबाबत आठ विविध पद्धतींचा वापर करून ४८ विद्यार्थ्यांवर अध्यापनाचे प्रयोग करीत होते. सर्वाधिक परिणामकारक अध्यापन पद्धती त्यांना ठरवायची होती.*

प्रत्येकी ६ विद्यार्थ्यांचा एक गट याप्रमाणे संशोधकाने त्या विद्यार्थ्यांचे आठ गट बनविले आणि प्रत्येक गटावर वेगवेगळी अध्यापन पद्धती राबविली. त्यानंतर समान चाचणी देऊन या विद्यार्थ्यांचे प्राविण्य अजमावले. तेव्हा आठ वेगवेगळ्या अध्यापन पद्धतीच्या परिस्थितीत वापरलेल्या प्रत्येक गटातील ६-६ विद्यार्थ्यांचे गुणदान पुढीलप्रमाणे आले तर या आठ परिस्थितीमुळे विद्यार्थ्यांच्या प्राविण्यात पडणारे फरक लक्षणीय आहेत का ? कोणत्या परिस्थितीचा विद्यार्थ्यांना सर्वाधिक लाभ झालेला आहे ? हे कोष्टक २ मध्ये दिलेले आहे.

गट *A*	गट *B*	गट *C*	गट *D*	गट *E*	गट *F*	गट *G*	गट *H*
६४	७३	७७	७८	६३	७५	७८	५५
७२	६१	८३	९१	६५	९३	४६	६६
६८	९०	९७	९७	४४	७८	४१	४९
७७	८०	६९	८२	७७	७१	५०	६४
५६	९७	७९	८५	६५	६३	६९	७०
९५	६७	८७	७७	७६	७६	८२	६८
बेरीज गुणांक							
४३२	४६८	४९२	५१०	३९०	४५६	३६६	३७२
गटाचे मध्यमान							
७२	७८	८२	८५	६५	७६	६१	६२
							एकूण बेरीज = ३४८६ सरासरी मध्यमान = ७२.६२

कोष्टक २ : अध्यापन पद्धतीनुसार विद्यार्थ्यांना मिळालेले गुण

अनेक वेळा सांख्यिकी / न्यादर्शाचे उत्तर फुगते किंवा आकुंचित होत असते / कमी होत असते ते वास्तव उत्तराच्या जवळ येण्यासाठी, दोन दशांशापर्यंत निष्कर्ष अचूक येण्यासाठी दुरुस्ती संख्या वजा करावी लागते. म्हणून प्रथम दुरुस्ती संख्या काढू.

पायरी १ - दुरुस्ती संख्या Correction Term (C)

$$C = \frac{(\text{एकूण बेरीज})^२}{N} = \frac{(३४८६)^२}{४८} = २,५३,१७१$$

पायरी २ - प्रत्येक गुणांकाचा वर्ग व त्यांची बेरीज

Total sum of squares SS =

$= (६४^२ + ७२^२ + \text{-------} + ७०^२ + ६८^२) - C$

= २,६२, ३६४ - २,५३, १७१ = ९,१९३

पायरी ३ - मध्यमानामध्ये गटामुळे पडणाऱ्या फरकांच्या संदर्भात वर्गांची बेरीज SS_M =

Sum of Squares among Means of A, B, C, D, E, F, G & H

$$\frac{(४३२)^२+(४६८)^२+(४९२)^२+(५१०)^२+(३९०)^२+(४५६)^२+(३६६)^२+(३७२)^२}{६} - C$$

$$= \frac{१,५४,०१८८}{६} - २,५३,१७१ = ३,५२७$$

पायरी ४ - निरनिराळ्या प्रायोगिक परिस्थितीमुळे गटात पडणाऱ्या फरकाबाबत बेरजेचा वर्ग -

Sum of Squares within conditions A, B, C, D, E, F, G & H

SS_W = Total SS - Among Mean SS

$= SS - SS_M$ = ९१९३ - ३५२७ = ५६६६

पायरी ५ - प्रसरण विश्लेषणाचा सारांश

प्रसरणाचे स्त्रोत	स्वाधीनता मात्रा	गुणांकाचा वर्ग	वर्गांचे सरासरी प्रसरण	प्रमाण विचलन
	d*f*	SS		SD
प्रायोगिक परिस्थितीतील मध्यमानातील फरकामुळे (Among the mean of Condition - SS_M)	(८-१) ७	३५२७	५०३.९ $\left(\frac{३५२७}{७}\right)$	

प्रसरणाचे स्त्रोत	स्वाधीनता मात्रा	गुणांकाचा वर्ग	वर्गांचे सरासरी प्रसरण	प्रमाण विचलन
	d*f*	SS		SD
परिस्थितीमुळे पडणारे फरक (Within Condition SSw)	४० (४८-८)	५६६६	१४१.६ $\left(\frac{५६६६}{४०}\right)$	११.९ $\sqrt{१४१.६}$
एकूण (Total)	४७			

कोष्टक ३ : प्रसरण विश्लेषण

$$\text{F - Ratio} = \frac{\text{Among the Means of Conditions (Mean Square)}}{\text{Within the Condition (Mean Square)}}$$

$$= \frac{\text{परिस्थितीच्या मध्यमानातील फरकामुळे प्रसरण (मध्यमान वर्ग)}}{\text{परिस्थितीतील फरकामुळे आलेले प्रसरण (प्रसरण वर्ग)}}$$

$$= \frac{५०३.९}{१४१.६}$$

= ३.५६

परिशिष्ट क्र. ३ वरून ०.०५ आणि ०.०१ सार्थकता स्तराची किंमत पाहण्यासाठी

जेव्हा

df_1 = ७ आणि df_2 = ४०

(उभ्या रकान्यात) (आडव्या रकान्यात)

F at ०.०५ स्तर = २.२६ F at ०.०१ स्तर = ३.१४

आपले आलेले F गुणोत्तर ३.५६ हे ३.१४ पेक्षाही मोठे आहे. म्हणून मध्यमानातील हा फरक सार्थ आहे. ह्यावरून असा निष्कर्ष काढता येईल की, विविध अध्यापन पद्धतींचा वापर करून अध्यापन केल्यास विद्यार्थ्यांच्या प्राविण्यात निश्चितपणे फरक पडलेला आढळून येतो आणि ह्या पद्धतीमुळे होणारी अध्ययन फलश्रुती एकमेकांपेक्षा भिन्न असते.

ज्या अध्यापन पद्धतीचे (परिस्थितीमुळे) मध्यमान सर्वात जास्त आहे (उदा. D अध्यापन पद्धती) ती पद्धती अध्यापनासाठी सर्वाधिक परिणामकारक आहे. म्हणून D प्रकारची अध्यापन पद्धती ही सर्व पद्धतीत सर्वाधिक परिणामकारक आहे आणि तिचा वापर केल्यास विद्यार्थ्यांना कमाल फायदा होऊ शकेल, असा संशोधनाचा निष्कर्ष आहे.

ज्यावेळी F - चाचणीच्या मदतीने मध्यमानांमध्ये पडणारा फरक सार्थ आहे, हे ठरविल्यानंतर त्याच वेळी या फरकांची सार्थकता किती गटांमध्ये आहे, हे पाहण्यासाठी पाच वेगवेगळी तंत्रे उपलब्ध आहेत, हे लक्षात घेतले पाहिजे. ती तंत्रे पुढीलप्रमाणे आहेत -

(१) अप्रायोरी आणि पोस्ट हॉक तुलना

A Priori and Post Hoc Comparisons

(२) न्यूमन केऊल यांची चाचणी

Newman - Keuls Test

(३) डंकन यांची बहुविस्तार चाचणी

Duncan Multiple Range Test

(४) टुकी चाचणी

Tukey Test

(५) संरक्षित टी-चाचणी

Protected t-test

या चाचण्यांबाबतची सविस्तर माहिती K. D. Broota यांच्या पुस्तकात मिळेल. अधिक विश्लेषणासाठी ते पुस्तक पहा.

सरावासाठी स्वाध्याय

एका संशोधकाने दहावीच्या विद्यार्थ्यांसाठी व्याख्यान, परिसंवाद आणि चर्चा पद्धती यांपैकी कोणती पद्धती अधिक परिणामकारक ठरते, हे पाहण्यासाठी संशोधन हाती घेतले. त्याने यादृच्छिक पद्धतीने दहावीच्या वर्गातील प्रत्येक पद्धतीसाठी ५ विद्यार्थ्यांची निवड केली. तीन महिने निवडलेल्या पद्धतींनीच विद्यार्थ्यांना शिकविल्यानंतर संपादनात फरक पडला का ? ह्याचा पडताळा पाहण्यासाठी संपादन चाचणी विद्यार्थ्यांना सोडविण्यास दिली. त्या चाचणीत मिळालेले गुण पुढे दिलेले आहेत. त्यावरून दहावीच्या विद्यार्थ्यांसाठी कोणती पद्धती अधिक परिणामकारक आहे ते शोधा.

विद्यार्थी क्रमांक	अध्यापन पद्धती		
	व्याख्यान (१)	परिसंवाद (२)	चर्चा (३)
१	८	११	५
२	१०	१३	५
३	११	१३	८
४	११	१५	९
५	१२	१६	१०

(आ) द्विमार्गी प्रसरण विश्लेषण (Two-way ANOVA)

ज्यावेळी एकाच प्रकारचे आश्रयी चल घेऊन निरनिराळ्या न्यादर्शावर प्रयोग केले जातात तेव्हा एकमार्गी प्रसरण विश्लेषण वापरले जाते. परंतु संशोधकाला जर एकाच वेळी दोन आश्रयी चलांचा परिणाम पाहावयाचा असेल तर त्याला द्विमार्गी प्रसरण विश्लेषणाचा वापर करावा लागतो. द्विमार्गी प्रसरण विश्लेषणामुळे दोन चलांच्या वेगवेगळ्या परिणामांबरोबरच चलांमधील आंतरक्रियांचेही मूल्यमापन करता येते. एकमार्गी प्रसरण विश्लेषण समजावून घेताना निरनिराळ्या न्यादर्शावर विविध अध्यापन पद्धती हा एकच चल वापरून विविध पद्धतीने प्रयोग करून विद्यार्थ्यांचे प्रावीण्य गुणांक काढले. परंतु अध्यापन पद्धतीच्या प्रकाराचा विद्यार्थ्यांच्या बुद्धिमत्तेशीही अत्यंत निकटचा संबंध असतो. म्हणून संशोधकाने त्याच्या संशोधनासाठी पुढीलप्रमाणे परिकल्पनेची मांडणी केलेली होती. **'उच्च बुद्धिमत्तेच्या विद्यार्थ्यांच्या दृष्टीने चर्चा आणि परिसंवाद पद्धत तर निम्न बुद्धिमत्तेच्या विद्यार्थ्यांच्या दृष्टीने पाठांतर पद्धती अधिक फलदायी ठरते'. ह्या परिकल्पनेची त्याला चाचणी घ्यावयाची होती.**

म्हणून या संशोधनामध्ये संशोधकाने प्रयोग करताना अध्यापन पद्धतीचे प्रकार आणि बुद्धिमत्तेचे स्तर अशी दोन चले एकाच वेळी अभ्यासासाठी घेऊन त्याचा विद्यार्थ्यांच्या प्रावीण्याशी कोणता संबंध आहे याचे विश्लेषण करण्याचा प्रयत्न केलेला होता. अशा द्विमार्गी प्रसरण विश्लेषणात दोन चलांचे परिणाम तर पाहता येतातच परंतु त्या जोडीला दोन चलांमध्ये जी आंतरक्रिया घडते तिचेही परिणाम वेगळेपणाने मोजता येतात. (आंतरक्रिया म्हणजे एका चलाचा दुसऱ्या चलावर व दुसऱ्या चलाचा पहिल्या चलावर होणारा परिणाम).

संशोधक ज्यावेळी द्विमार्गी प्रसरण विश्लेषणाचा वापर करतो त्यावेळी प्रत्येक चलाचे एकमार्गी विश्लेषणही मिळते. त्यामुळे प्रत्येक चलाचे पुन्हा एकमार्गी विश्लेषण काढण्याची आवश्यकता राहत नाही.

संशोधनासाठी द्विमार्गी प्रसरण विश्लेषणाचा तुम्ही जेव्हा वापर कराल तेव्हा पुढील बाबी लक्षात ठेवा -

(१) दोन्ही चलांचे एकमार्गी विश्लेषण सार्थ आलेले असेल तरच त्यांच्यातील आंतरक्रियाही सार्थ येते.

(२) दोन चलांपैकी फक्त एका चलाचे एकमार्गी विश्लेषण सार्थ आलेले असेल तर त्यांच्यातील आंतरक्रिया सार्थ येण्याची अंशत: शक्यता असते.

(३) दोन्ही चलांचे एकमार्गी विश्लेषण सार्थ आलेले नसेल तर त्याच्यातील आतरक्रियासुद्धा सार्थ येत नाही.

द्विमार्गी प्रसरण विश्लेषण काढताना प्रत्येक उपगटातील विद्यार्थी संख्या सारखीच येते, असे नाही. त्यावेळी असमान द्विमार्गी प्रसरण विश्लेषण तंत्राचा वापर करावा लागतो हे लक्षात ठेवा.

द्विमार्गी प्रसरण विश्लेषण तंत्रातील प्रत्येक चलाचे एकमार्गी प्रसरण विश्लेषण सार्थक आल्यास कोणत्या उपगटामुळे तो सार्थक आला हे पाहता येते. त्यासाठी बुटा यांच्या 'Experimental Design in Behavioural Research' या पुस्तकात प्रकरण क्रमांक सात 'Factional Experiments' मध्ये सविस्तर माहिती दिलेली आहे. ह्या पुस्तकातील या घटकाचे सविस्तर वाचन करा. ही विश्लेषणे अलीकडे संगणकामध्ये सुयोग्य मृदू साहित्य वापरून आकडेमोड न करताही काढता येतात. त्याबाबतची माहिती आपण पुढे पाहणार आहोत.

(इ) बहुचल प्रसरण विश्लेण - मॅनोव्हा (Multiple / Multi-variate Analysis of Variance - MANOVA)

जेव्हा आपण अनेक चलासंबंधीची अनेक गटांची आधारसामुग्री गोळा करतो त्यावेळी दोन दोन चलांमधील प्रसरण विश्लेषण करणे फारच वेळखाऊ आणि जिकिरीचे काम असते. अशा वेळी मॅनोव्हाचा वापर करतात यानांच बहुचल प्रसरण विश्लेषण किंवा गुणित प्रसरण विश्लेषण असेही म्हटले जाते. आपण जर दोन-दोन चलामधील प्रसरण विश्लेषण काढीत राहिलो तर बहुचलांमधील परस्पर आंतरक्रियांचा भाग वगळला जातो. (दुर्लक्षिला जातो). परिणामी अनेक आश्रयी चलांमधील सहसंबंधाचा विचार होत नाही. मॅनोव्हामुळे आपणांस अनेक चलांमधील फरकांचे बहुमितीय विश्लेषण करता येते.

रस्त्यांवर होणाऱ्या अपघातासंबंधातील माहितीचे सर्वेक्षण करताना एका संशोधकाला नेहमीचे चालक, दारुडे चालक, बेभान चालक, प्रवासी यांच्यामुळे किती गाड्यांचे अपघात होतात ? किती चालक पथदीपाला ठोकर मारतात आणि किती पादचारी मृत्यूमुखी पडतात. अशा अनेकविध गोष्टींचा तपास करावयाचा होता तेव्हा त्या ठिकाणी अॅनोव्हाऐवजी मॅनोव्हाचा वापर करणेच संयुक्तिक ठरेल हे त्याने लक्षात घेतले होते.

वरील तीनही प्रायोगिक परिस्थितीमध्ये किंवा संशोधनामध्ये आपण जे न्यादर्श वापरतो ते मुळीच समतुल्य नसतात. परंतु काही संशोधनांमध्ये एकाच न्यादर्शावर पुन्हा पुन्हा प्रयोग करावे लागतात किंवा त्यापेक्षा २ किंवा ३ समतुल्य गटांवर प्रयोग करावे लागतात. त्यावेळी मात्र अॅनोव्हाऐवजी अॅनकोव्हाचा (सहप्रसरण विश्लेषण) वापर करावा लागतो. कारण सहसंबंधाचा विचार करणे आवश्यक असते. अनेक शिक्षकांना एकच गट वर्षानुवर्षे अनेक पातळ्यांवर हाताळावा लागतो तेव्हा अॅनकोव्हा माहीत असणे उपयुक्त ठरते. उदाहरणार्थ, ५ वी ला गणित विषय शिकवणारा शिक्षक त्याच मुलांना ते १० वी उत्तीर्ण होईपर्यंत सलग गणित विषय शिकवतो.

(५) सहप्रसरण विश्लेषण (अॅनकोव्हा) (Ancova - Analysis of Co-Variance)

ज्यावेळी स्मृती किंवा अध्ययन यांसारख्या विषयावर संशोधन करावयाचे असेल त्यावेळी संशोधनासाठी एक तर एकाच गटावर पुन्हा पुन्हा प्रयोग करावे लागतात किंवा दोन अगर दोनापेक्षा जास्त समतुल्य गट घ्यावे लागतात. यांपैकी एक नियंत्रित गट म्हणून काम करतो तर दुसरा प्रायोगिक गट म्हणून कार्य करीत असतो.

समतुल्य (Equivalent) गट दोन पद्धतीने मिळविता येतात.

(१) समान गुणवत्तेच्या दोन व्यक्ती निवडून प्रत्येक गटात त्यांपैकी एक ह्याप्रमाणे दोन वेगवेगळ्या गटात समाविष्ट करतात पण असे गट मिळणे खूप अवघड असते. तसेच या गटांचे आकारही फार लहान असतात. त्यामुळे त्याआधारे मिळणारे सांख्यिकीय विश्लेषण फारसे विश्वसनीय नसते. ह्यांना समांतर गट म्हणतात, पर्यायी गट म्हणतात. पण ते तंतोतंत सारखे नसतातच.

(२) दोन गट संशोधनासाठी असे निवडतात की प्रारंभिक चाचणीत (नियंत्रित चलासाठीची) दोन्ही गटांचे मध्यमान आणि प्रमाण विचलन जवळपास एकसारखे आलेले असते. त्यासाठी गटांचा आकार तंतोतंत एकसारखा असण्याची गरज नसते. परंतु दोन्ही गटांच्या आकारामध्ये फार मोठ्या प्रमाणात फरक असता कामा नये. ही गोष्ट टी गुणोत्तर / टी चाचणीत आपण पाहिली आहेच. अशा गटांवर ज्यावेळी प्रयोग केले जातात त्यावेळी प्रसरण विश्लेषणाचे विस्तारित रूप म्हणून सहप्रसरण विश्लेषणाचा वापर केला जातो. त्यासाठी प्रारंभिक चल (नियंत्रित) आणि अंतिम चल (प्रायोगिक) यामध्ये असणारा सहसंबंधसुद्धा विचारात घ्यावा लागतो. मानसशास्त्रीय प्रयोगामध्ये अनेक कारणांमुळे सुरुवातीला नियंत्रित आणि प्रायोगिक गट एकसारखे करणे अतिशय कठीण असते किंवा जवळपास अशक्य असते अशा वेळी सहप्रसरण विश्लेषणामुळे अंतिम गुणांकामध्ये योग्य प्रकारचे समायोजन करणे संशोधकाला शक्य होत असते. सहप्रसरण विश्लेषणाच्या सूत्रात सहसंबंधगुणकाचा वापर केलेला असतो.

द्विमार्गी प्रसरण विश्लेषण, बहुचल प्रसरण विश्लेषण, सहप्रसरण विश्लेषणाबाबतची धावती ओळख नव्हे तर फक्त तोंडओळखच येथे करून देण्यात आलेली आहे. त्याचा हेतू तुमच्या संशोधनामध्ये एकापेक्षा जास्त चले असतील, न्यादर्श समतुल्य असतील / नसतील, एकाच गटावर अनेक वेळा प्रयोग केलेला असेल तर फरकाची सार्थकता ठरविण्यासाठी कोणकोणत्या सांख्यिकी तंत्राचा वापर करावा हे तुम्हांला समजावे एवढीच अपेक्षा आहे. आपणांस या तंत्राचा वापर करावयाचा असेल तर प्रगत सांख्यिकीची गरज असते. संदर्भ पुस्तके आपण वाचणे अपेक्षित असते तसेच स्वत: किंवा ऑपरेटरमार्फत संगणक वापरूनही ह्या गोष्टी तुम्हांला करता येतील. पण संशोधक हा केवळ मेकॅनिक नसावा तर अभियंता असावा म्हणून हे बौद्धिक उद्बोधनही आपणांस माहीत असावे.

ज्यावेळी दोन सांख्यिकी प्रमाणकामधील फरकांची लक्षणीयता, क्रांतिक गुणोत्तर, t-चाचणी, F- गुणोत्तर, इत्यादी तंत्रांनी आपण पडताळून पाहतो. त्यावेळी गुणांक हे लोकसंख्येमध्ये प्रसामान्यपणे विभाजित झालेले आहेत, असे गृहीत धरून सांख्यिकी प्रमाणके काढली आहेत. गृहितकावर संशोधकाचा दृढविश्वास असतो. या प्रमाणकांमधील फरक आपण शून्य परिकल्पनेच्या आधारे खरा की खोटा हेसुद्धा पडताळून पाहतो.

जेव्हा न्यादर्शाचा आकार खूपच लहान असतो किंवा मिळालेल्या आधारसामुग्रीचे वितरण खूपच विषमित असते तेव्हा प्राप्त झालेल्या आधारसामुग्रीतील गुणांक प्रसामान्यपणे विभाजित झालेले आहेत, हे आपले गृहितकच संशयास्पद ठरते. त्यावरून परिमेय पद्धतीने या फरकांची सार्थकता सिद्ध करणे किंवा तो फरक खोटा ठरविणे ही गोष्ट सदोष मूल्याची तसेच उपयोजनांच्या दृष्टीने अयोग्य ठरण्याची शक्यता असते. अशा वेळी वेगळ्याच सांख्यिकी तंत्राचा किंवा अपरिमितीय चाचण्यांचा वापर करावा लागतो. त्याबाबतची माहिती पुढे दिलेली आहे.

६.२ अपरिमितीय / अपरिमेय चाचण्या (Non-Parametric Tests)

गटात विषमितता जास्त असेल तर अशा परिस्थितीतसुद्धा, लोकसंख्येची सर्वसामान्य वितरणता नजरेआड करूनदेखील, आपणांस न्यादर्शाची तुलना करता आली पाहिजे. त्यावरून लक्षणीयतेचे / सार्थकतेचे निष्कर्ष काढता आले पाहिजेत. ह्यासाठी वेगळ्या पद्धती वा तंत्रे वापरली जातात. अशा पद्धतींना अपरिमेय पद्धती किंवा वितरणमुक्त पद्धती असे म्हणतात. यांपैकी 'काय स्क्वेअर' तंत्र हे एक उत्कृष्ट अपरिमितीय तंत्र आहे. कारण 'काय स्क्वेअर'ची लक्षणीयता कोष्टकातील स्वाधीनता मात्रेवर केवळ अवलंबून असते. वितरण प्रसामान्य असेल असे गृहितक मानण्याची गरज नसते. अशा वेळी आधारसामग्रीत -

- ★ चलाचे वितरण निरनिराळ्या प्रवर्गामध्ये (Categories) केलेले असते.
- ★ काय स्क्वेअर तंत्रात निरीक्षीत वारंवारिता (Observed Frequencies - fo) आणि अपेक्षित वारंवारिता (Expected Frequencies - fe) यांच्यातील फरकाचाच फक्त विचार केलेला असतो आणि त्यावरूनच फरकाची सार्थकता / निरर्थकता ठरवतात.

स्पिअरमन पद्धतीने काढलेला सहसंबंध गुणक P (ऱ्हो) काढणे हीसुद्धा तशी अपरिमेय पद्धतीच आहे. कारण तेथे आपण प्रत्यक्ष गुणांक लक्षात न घेता फक्त ओळीने येणारा गुणांकाचा क्रमांक किंवा श्रेणी तेवढी लक्षात घेतली जाते. P चा उपयोग हा प्राधान्याने गटामध्ये ३० पेक्षा कमी लोक असतात तेव्हा केला जातो. अशा गटात वितरण खूपच विषमित असण्याची कमाल शक्यता असते. म्हणूनच स्पिअरमनचे तंत्र हे परिमेय / परिमित नसून अपरिमित तंत्र आहे हे संशोधकाने लक्षात घेतले पाहिजे.

अपरिमितीय तंत्रे परिमितीय चाचण्यांइतकी सशक्त, अचूक व बलशाही नाहीत. निष्कर्षामध्येही परिमितीय मापनाइतका ठामपणा नसतो, परिमितीय तंत्राप्रमाणे खराखुरा फरक अचूक हुडकून काढण्याची व सिद्ध करण्याची क्षमतासुद्धा अपरिमितीय चाचण्यांमध्ये नसते. म्हणूनच पुढील तीन परिस्थितीतच अपरिमितीय तंत्र कटाक्षाने वापरावीत.

(१) ज्यावेळी न्यादर्शाचा आकार खूप लहान असतो (जसा मिळेल तसा, जेथे मिळेल तेथे व जेवढा मिळेल तेवढा असा न्यादर्श वापरला जातो.) अगदी ३-४ घटकांचा न्यादर्शसुद्धा गरजेनुसार वापरला जातो.

(२) जेव्हा संशोधन चलाचे लोकसंख्येतील वितरण प्रसामान्य असण्याबद्दल संशोधक साशंक असतो आणि आधारसामुग्री प्रसामान्य विभाजनाप्रमाणे मिळण्याची त्याला खात्री वाटत नसते.

(३) आधारसामुग्री ही गुणांकाऐवजी क्रमांकामध्ये / श्रेणीमध्ये सादर केलेली असते. म्हणजे आधारसामुग्रीचे अंतर श्रेणीनुसार किंवा गुणोत्तर श्रेणीनुसार वर्गीकरण मिळत नाही. फक्त नामांकन (Nominal) किंवा क्रमांकन (Ordinal) श्रेणीमध्येच गुणांकाचे विभाजन करणे शक्य होते व त्याचीच आधारसामुग्री बनलेली असते.

सरावासाठी स्वाध्याय

तुमच्या संशोधनातून मिळालेल्या आधारसामुग्रीला परिमितीय की अपरिमितीय यांपैकी कोणती चाचणी लागू पडते ते सकारण लिहा. तुमचा निर्णय योग्य आहे की नाही ? ह्याबाबत मार्गदर्शकांशी चर्चा करा.

अपरिमितीय चाचण्यांमध्ये गटांची तुलना करून त्यातील सार्थकता / निरर्थकता ठरविली जाते. त्यासाठी

(१) चिन्ह चाचणी,

(२) मध्यांक चाचणी,

(३) काय स्क्वेअर चाचणी,

(४) विलकॉक्सन मॅनव्हिटने चाचणी.

यांचा प्रामुख्याने वापर केला जातो त्यांची सविस्तर माहिती उदाहरणासह पुढे स्पष्ट केलेली आहे.

(१) चिन्ह चाचणी (Sign-test)

अपरिमितीय आधारसामुग्रीच्या चाचणीतील चिन्ह चाचणी ही अतिशय सोपी आणि सर्वत्र उपयोगी पडणारी चाचणी आहे. **या चाचणीद्वारे दोन प्रमाणकांमधील फरकाची फक्त दिशा लक्षात घेऊन फरकाची सार्थकता किंवा निरर्थकता सांगण्याचा प्रयत्न केला जातो. म्हणून तिला चिन्ह चाचणी असे म्हणतात.** तिच्यात + व - (अधिक व वजा) चिन्हेच लक्षात घेतात.

या चाचणीत वापर पुढील परिस्थितीत केला जातो.

★ *जेव्हा आधारसामुग्रीतील गुणांकाचा व्यक्तिश: विचार करावयाचा नसतो.*

★ *संशोधनामध्ये कठोर संख्यात्मक मापन अशक्य असते. फक्त दोन निरीक्षण मापनाच्या जोडीपैकी कोण मोठे आहे ? कोण छोटे आहे ? एवढेच माहीत असते.*

★ *साधारणपणे जेव्हा परस्परसंबंधित दोन न्यादर्श असतात आणि संशोधकाला / प्रयोजकाला दोन परिस्थिती भिन्न आहेत असे सिद्ध करावयाचे असते तेव्हा सुरुवातीचा प्रयत्न म्हणून चिन्ह चाचणीचा वापर केला जातो.*

या चाचणीसाठी चलाचे वितरण सातत्यपूर्ण असण्याची खात्री असावी लागते. परंतु या चाचणीच्या आधारे आपणांस फरकाचे वितरण कोणत्या प्रकारचे असेल तसेच निवडलेल्या व्यक्ती एकाच प्रकारच्या लोकसंख्येतीलच असतील असे खात्रीलायक सांगता येत नाही. फक्त बाह्य घटकांबाबत सर्वांसाठी एकसारखी परिस्थिती टिकविण्याची खबरदारी मात्र संशोधकाने घेतलेली असते. ह्या सर्व गोष्टी आपण एका उदाहरणाने समजावून घेऊ या. उदाहरण कोष्टक ४ मध्ये दिलेले आहे.

विद्यार्थ्यांच्या इंग्रजी स्पेलिंगच्या चुका कमी करण्यासाठी एका संशोधकाने दोन पद्धतीने २५ शब्दांचे स्पेलिंग पाठ करून घेण्याचा प्रयोग केला. त्यांपैकी एका गटाला २५ सुट्या शब्दांची यादी देण्यात आली तर दुसरे तितकेच कठीण असलेले शब्द एका कथेमध्ये समाविष्ट करून सांगितले होते. सातवीच्या वर्गातील १०-१० विद्यार्थ्यांचे गट करून त्यांच्यावर हा प्रयोग करण्यात आला आणि मग त्यांचे गुणांक नोंदवून पहिल्या गटातील एक आणि दुसऱ्या गटातील एक विद्यार्थी असा फरक पाहण्यात आला. तेव्हा पुढील कोष्टक तयार झाले.

(१) C (कथा गट)	(२) S (सुटे शब्द गट)	(३) C-S
१५	१२	+
१८	१५	+
९	१०	-
१५	१६	-
१८	१८	०
१२	१०	+
१५	१२	+
१६	१३	+
१४	१२	+
२२	१९	+

कोष्टक ४ : दोन विविध पद्धतीने विद्यार्थ्यांना मिळालेले गुण

C - संदर्भासहीत शब्द (कथेतील शब्द) (Context) दिलेला गट (Words in a story)

S - स्वतंत्र सुटे शब्द (Separates) दिलेला गट (Words spelled as Signs)

C-S ची चिन्हे - वर्गीकरण

(+) ७ (अधिक चिन्हे)

(-) २ (वजा चिन्हे)

(0) १ (शून्य फरक चिन्हे)

एकूण = १०

वरील उदाहरणावरून संशोधक असा निष्कर्ष काढू शकतो की, संदर्भासहीत शब्दांचे किंवा कथेतील शब्दांचे स्पेलिंग सुट्या शब्दांपेक्षा अधिक चांगले पाठांतर होते. कारण १० पैकी ७ चिन्हे + आहेत.

चिन्ह चाचणी अगदी सोपी असली तरी ती जुजबी स्वरूपाची आहे. जेव्हा गटातील विद्यार्थ्यांची संख्या २० पेक्षा जास्त असते तेव्हा संशोधकाने शक्यतो काय स्क्वेअर तंत्राचाच वापर करावा. तोच अधिक फायदेशीर असतो.

(२) मध्यांक चाचणी (Median Test)

जेव्हा प्रायोगिक गट आणि नियंत्रित गट हे परस्परसंबंधित नसून स्वतंत्र किंवा वेगवेगळे असतात तेव्हा त्यांच्या प्रावीण्याची तुलना करण्यासाठी अपरिमितीय / अपरिमेय तंत्रात मध्यांक चाचणी प्राधान्याने वापरली जाते. त्यासाठी -

★ प्रथम दोन्ही गट एकत्र करून त्यांचा एकत्रित मध्यांक काढला जातो. (सरासरी मध्यांक).

★ या सरासरी मध्यांकापासून जादा गुणांक मिळविणारा विद्यार्थी असल्यास अधिकचे चिन्ह देतात तर मध्यांकाच्या खाली कमी गुणांक मिळविणारा विद्यार्थी असल्यास ऋण चिन्ह देतात.

★ जर दोन गट एकाच लोकसंख्येतून यादृच्छिक पद्धतीने निवडलेले असतील तर प्रत्येक गटातील निम्मे लोक सरासरी मध्यांकाच्या वर व निम्मे लोक सरासरी मध्यांकाच्या खाली असले पाहिजेत म्हणून अशा वेळी २x२ कोष्टक तयार करून आपण काय स्क्वेअरसुद्धा काढू शकतो. मध्यांक चाचणीत एका विभागणीमध्ये (Category मध्ये) सरासरी मध्यांकाच्या वरचे आणि खालचे असे कोष्टक तयार केले जाते तर दुसरी तुलना प्रायोगिक गट आणि नियंत्रित गट यांच्या मध्यांकाच्या तुलनेची असते. परंतु या चाचणीसाठी दोन्ही गटाचा आकार एकसारखा असण्याची मात्र गरज नसते. एक उदाहरण पाहू या. म्हणजे ही गोष्ट चटकन लक्षात येईल.

एका संशोधनामध्ये संशोधकाने मनोविकृत रोग्यांच्या हात थरथरण्यावर औषधांचा कोणता परिणाम होतो हे पडताळण्याचा प्रयोग केला होता. त्यासाठी १४ मनोविकृत रोग्यांना औषधाच्या गोळ्या दिल्या तर त्यांच्याशी वय आणि लिंग समानता असणाऱ्या १८ रोग्यांच्या गटाला भ्रामक गोळ्या (प्लेसबो) देण्यात आल्या. खरी औषधाची गोळी घेणारा गट हा प्रायोगिक गट होता तर भ्रामक गोळी घेणारा गट हा नियंत्रित गट होता. काही काळानंतर हस्तकंपनावर झालेला परिणाम योग्य चाचणीद्वारे मोजण्यात आला. सरासरी मध्यांकापेक्षा ज्यांचे गुणांक जास्त होते ते + चिन्हाने दाखविण्यात आले आणि कमी गुणांक हे - चिन्हाने दाखविण्यात आले. हेच कोष्टक ५ मध्ये दिलेले आहे.

N = 14		N = 18	
प्रयोगिक गट *Experimental Gruoup*	चिन्ह *Sign*	नियंत्रित गट *Control Gruoup*	चिन्ह *Sign*
५३	+	४८	-
३९	-	६५	+
६३	+	६६	+
३६	-	३८	-
४७	-	३६	-
५८	+	४५	-
४४	-	५९	+
३८	-	५३	+
५९	+	५८	+
३६	-	४२	-
४२	-	७०	+

प्रयोगिक गट *Experimental Gruoup*	चिन्ह *Sign*	नियंत्रित गट *Control Gruoup*	चिन्ह *Sign*
४३	-	७१	+
४६	-	६५	+
४६	-	४६	-
		५५	+
		६१	+
		६२	+
		५३	+

कोष्टक ५ : प्रायोगिक आणि नियंत्रित गटाचे गुणांक

Common Median = ४९.५ (दोन्ही गटासाठी समान सरासरी मध्यांक = ४९.५)

वरील कोष्टकावरून χ^2 Table पुढीलप्रमाणे मांडता येईल. (येथे प्रायोगिक गटामध्ये कंपने कमी असणाऱ्यांची संख्या नियंत्रित गटापेक्षा जास्त आहे. औषधाचा परिराम स्पष्ट दिसतो.)

	मध्यांकापेक्षा कमी विद्यार्थी संख्या	*मध्यांकापेक्षा जास्त विद्यार्थी संख्या*	*एकूण*
प्रायोगिक	१० (A)	४ (B)	१४ (A+B)
नियंत्रित	६ (C)	१२ (D)	१८ (C+D)
	१६(A+C)	१६(B+D)	N = ३२

कोष्टक ६ : काय स्क्वेअर चाचणीद्वारे विश्लेषण

हेच उदाहरण आपणास χ^2 तंत्राचा वापर करून पुढीलप्रमाणे सोडवता येऊ शकेल. प्रथम त्याचे **कोष्टक ६ प्रमाणे** कोष्टक तयार करावे लागेल.

df = (C-१) (R-१) = (२-१) (२-१) = १

$$\chi^2 = \frac{N [(AD - BC)^2}{(A + B) (C+D) (A+C) (B+D)}$$

$$= \frac{३२ (१२० - २४)^2}{१४ \times १८ \times १६ \times १६}$$

= ४.५६

$df = १$ व $\chi^2 = ४.५६$

$\therefore p = ०.०४$

सार्थकता ठरविण्यासाठी χ^2चे 'Table ' तुम्हांला पहावे लागतेल. ते परिशिष्ट ४ मध्ये देण्यात आलेले आहे.

ह्याचा अर्थ असा की, प्रायोगिक व नियंत्रित गटांतील फरक हे १०० प्रयोगात ९६ वेळा खरे आणि ४ वेळा योगायोगाने येऊ शकतात. म्हणून शून्य गृहितक अस्वीकार करून व फरक मान्य करावा असा निष्कर्ष आपण काढू शकतो. कारण फरक सत्य ठरण्यासाठी तो १०० पैकी किमान ९५ वेळा खरा आलाच पाहिजे. येथे तो ९६ पेक्षा जास्त वेळा खरा येतो म्हणजे प्रायोगिक गटाला औषधांचा फायदा झालेला आहे.

(३) χ^2 काय स्क्वेअर चाचणी (χ^2 - हे ग्रीक भाषेतील वर्णाक्षर आहे)

संख्याशास्त्रीय संशोधनात वापरले जाणारे हे महत्त्वपूर्ण व प्रभावी तंत्र आहे. परिमितीय चाचण्यांतही ते वापरले जाते. शून्य व दिशांकित परिकल्पनांची चाचणी त्यामुळे घेता येते. प्रायोगिक गृहितकांची चाचणी घेण्यासाठी त्याचा परिणामकारक वापर केला जातो.

संशोधक स्वत:च्या मनाशी समस्येचे संभाव्य उत्तर म्हणून काहीतरी परिकल्पना निश्चित करीत असतो. शून्य परिकल्पना, दिशांकित परिकल्पना ह्या सर्वसाधारणपणे संशोधनात वापरल्या जाणाऱ्या महत्त्वपूर्ण परिकल्पना आहेत. कोणत्याही संशोधनाचा उद्देश कुठलीही परिकल्पना सिद्ध करणे हा नसतो तर तिची चाचणी घेऊन ती परिकल्पना खरी की खोटी हे पडताळणे हाच खरा उद्देश असतो. प्रायोगिक संशोधनातून परिकल्पना खरी आहे असे सिद्ध झाले तर तिचे रूपांतर सिद्धांतात होते आणि खोटी आहे असे सिद्ध झाले तर तिचा त्याग करून सुधारित विरोधी किंवा वेगळी परिकल्पना मांडून पुन्हा चाचणी घ्यावी लागते. परिकल्पना आणि संशोधनातून मिळणारी आधारसामग्री ह्या तंतोतंत एकसारख्या येत नाहीत. त्यांच्यात थोडाफार फरक हा आढळतोच. तो फरक निरर्थक आहे की सार्थ आहे हे पडताळून पाहण्यासाठी अतिशय साहाय्यकारी ठरणारे तंत्र म्हणजे χ^2 - काय स्क्वेअर तंत्र होय.

एखाद्या परिकल्पनेच्या आधारे निश्चित केलेली वारंवारितेची तात्त्विक विभागणी (fe - Frequency Expected) व प्रत्यक्ष संशोधनात मिळालेली आधारसामग्रीतील (fo - Observed Frequency) असे वर्गीकरण मांडतात आणि त्याआधारे पुढील सूत्राने χ^2 शोधून काढतात.

$$\chi^2 = \Sigma \frac{(fo - fe)^2}{fe}$$

fo - विभागणीमध्ये असलेली निरिक्षित वारंवारिता

fe - विभागणीमध्ये अपेक्षित असलेली वारंवारिता

जर अपेक्षित आणि निरिक्षित वारंवारिता यांच्यामध्ये अगदी कमी फरक असेल तर χ^2 ची किंमत खूपच कमी येते त्यावेळी हा फरक दुर्लक्षणीय ठरतो. म्हणजेच फरक योगायोगाने येण्याची संभवनीयता जास्त. अर्थात $P > ०.०५$ होण्याची शक्यता जास्त असते. परंतु अपेक्षित आणि निरिक्षित वारंवारितेमध्ये मोठा फरक पडत असेल तर χ^2 किंमत वाढते आणि फरक खरा ठरून परिकल्पना खोटी ठरण्याची शक्यता वाढते. कारण जितका χ^2 मोठा तितका p (योगायोगाने फरक येण्याची शक्यता) कमी

असते. म्हणजेच $p < ०.०५$. त्यामुळे फरक वास्तव व खरा ठरतो आणि शून्य परिकल्पनेचा त्याग करावा लागतो. हे झाले नेहमीच्या द्विपुच्छ चाचणीबाबत तर दिशांकित परिकल्पनेमध्ये फरकाची सार्थकता पडताळून पाहण्याची p ची किंमत न घेता 1/2 p ची किंमत घ्यावी लागते. कारण ती एकपुच्छ चाचणी असते त्यावरून फरक सार्थ आहे की निरर्थक आहे हे ठरवावे लागते. म्हणजे p = .१० आले तरी १/२ = .०५ ठरल्यामुळे फरक खरा ठरतो. दुसरे एक उदाहरण पहा.

दिशांकित परिकल्पना ग्राह्य मानून χ^2 काढला असेल आणि p ची किंमत ०.०८ आली असेल तर तात्काळ फरक सार्थ नाही असा निष्कर्ष काढावयाचा नसतो तर १/२ P घेऊन त्याची किंमत ०.०४ म्हणजे हा फरक फक्त ४% वेळा योगायोगाने येतो व ९६% वेळा तो खरा येतो, असे सिद्ध होते. त्यावरून दिशांकित परिकल्पनेचा त्याग करावयाचा असतो आणि निरिक्षित विभागणी ही अपेक्षिततेपेक्षा निश्चितच वेगळी आहे असे निदान करावे लागते.

χ^2 काढल्यानंतर त्यावरून फरकाची सार्थकता किंवा निरर्थकता ठरविण्यासाठी P ची किंमत किती येते हे पाहण्यासाठी कोष्टक दिलेले असते. त्याचा पहिला उभा रकाना स्वाधीनता मात्रा दाखवित असतो. स्वाधीनता मात्रा काढण्यासाठी -

d*f* = स्वाधीनता मात्रा = (C-1) (R-1)

C = उभ्या रकान्यांची संख्या (Columns)

R = आडव्या रकान्यांची संख्या (Rows)

बहुसंख्य विभाजनात आडव्या रकान्यांची संख्या दोनच असते. (१ *fo* चा व १ *fe* चा असे दोन आडवे रकाने असतात.)

एका परिकल्पनेचे आपण ज्यावेळी परीक्षण करतो त्यावेळी R ची संख्या नेहमी दोन असते. तसेच जर द्विभाजन असेल उदाहरणार्थ, होय/नाही, चूक/बरोबर असे दोनच उभे स्तंभ (Columns) असतील तर अशा वेळी d*f* ची किंमत नेहमी 1 येते. d*f* च्या किंमतीनुसार आपले आलेले χ^2 ची किंमत ज्या उभ्या रकान्यात सापडेल त्याच्या शीर्षभागाशी P ची किंमत लिहिलेली असते ती किंमत घेऊन किंवा आकडेमोड करून आलेल्या P च्या किंमतीवरून फरकाची सार्थकता ठरवावयाची असते.

p ची किंमत ०.०५ किंवा त्यापेक्षा कमी आली तर अपेक्षित व निरिक्षित वारंवारितेमध्ये फरक निश्चित आहे. p ची किंमत ०.०५ पेक्षा मोठी आली तर फरक खोटा आणि गृहित धरलेली परिकल्पना खरी असे निदान करावे लागते.

हे तात्त्विक विवेचन आपण एका उदाहरणाने समजावून घेऊ.

भारताने जागतिक व्यापार संघटनेचे (WTO) सदस्य व्हावे का ? याबद्दल ४८ जाणकार राजकारण्यांची मते नोंदविण्यात आली होती. ही मते अनुक्रमे अनुकूल, तटस्थ आणि प्रतिकूल अशा तीन गटांत विभाजित केली गेली तेव्हा २४ अनुकूल, १२ प्रतिकूल आणि १२ तटस्थ अशी मते आढळली तर त्यावरून राजकारण्यांच्या WTO बाबत दृष्टिकोनात विशेष मतप्रवाह संशोधकाला आढळेल का?

(१) प्रथम अपेक्षित वारंवारिता काढावी लागेल.

शून्य परिकल्पनेच्या समतुल्य विभागणी तत्त्वानुसार

(Equal Probability Hypothesis)

प्रत्येक गटासाठी अपेक्षित वारंवारिता

$$fe = \frac{४८}{३} = १६$$

fe काढल्यानंतर संशोधकाला कोष्टक ७ मध्ये कोष्टक तयार करावे लागते.

	अनुकूल	*तटस्थ*	*प्रतिकूल*	*एकूण*
निरक्षित वारंवारिता (*f*o)	२४	१२	१२	४८
अपेक्षित वारंवारिता (*f*e)	१६	१६	१६	४८
(*f*o-*f*e)	८	४	४	
$(fo\text{-}fe)^2$	६४	१६	१६	
$(fo\text{-}fe)^2/fe$	४	१	१	

कोष्टक ७ : चाचणीद्वारे विश्लेषण

$$\chi^2 = \Sigma \frac{[(fo - fe)^2]}{fe}$$

$= ४ + १ + १ = ६$ व $df = २$

$\chi^2 = [(३-१) X (२-१) = २ X १]$

p ची किंमत ०.०५ इतकी येण्यासाठी χ^2 ची किंमत कोष्टकात ५.९९१ इतकी दिलेली आहे. ज्याअर्थी P = ०.०५ त्याअर्थी १०० पैकी फक्त ५ वेळा समतुल्य संभाव्यता परिकल्पनेपेक्षा येणारा फरक योगायोगाने किंवा अपघाताने येत होता तर ९५ वेळा मात्र तो फरक खरा येत होता. त्यामुळे फरक खरा मानून आणि समतुल्य संभाव्यता परिकल्पनेचा त्याग करून आपण असा ठाम निष्कर्ष काढू शकतो की,

भारताने जागतिक व्यापार संघटनेचे सभासद व्हावे यासाठी राजकारण्यांचा मतप्रवाह अनुकूल असा आहे.

आपण दुसरे एक उदाहरण पाहू.

भारतीय क्रिकेट संघाची निवड योग्य आहे का ? हे पडताळण्यासाठी एक संशोधकाने शंभर क्रिकेट शौकिनांच्या अभिवृत्तीचे मोजमाप केले. त्याचे पाच गटांत विभाजन करण्यात आले. ते गट असे - अतिशय उत्तम, चांगली, सांगता येत नाही, योग्य नाही. निकृष्ट निवड आहे. प्रत्येक विभाजनात आलेली क्रिकेट शौकिनांची संख्या पुढीलप्रमाणे होती. यासाठी संशोधकाला प्रथम कोष्टक ८ प्रमाणे कोष्टक तयार करावे लागेल. अपेक्षित वारंवारिता - प्रत्येक गटासाठी

$$= \frac{१००}{५} = २०$$

	अतिशय उत्तम	*चांगली*	*सांगता येत नाही*	*योग्य नाही*	*निकृष्ट निवड आहे*	*एकूण*
निरिक्षित वारंवारिता (*f*o)	२३	१८	२४	१७	१८	१००
अपेक्षित वारंवारिता (*f*e)	२०	२०	२०	२०	२०	१००
(*f*o-*f*e)	३	-२	४	-३	-२	
$(fo-fe)^2$	९	४	१६	९	४	
$(fo-fe)^2/fe$	०.४५	०.२०	०.८०	०.४५	०.२०	

कोष्टक ८ : चाचणीद्वारे क्रीडा शौकिनांच्या अभिवृत्तीचे विश्लेषण

χ^2 = ०.४५ + ०.२० + ०.८० +०.४५ +०.२०

χ^2 = २.१०   df = ४

[(५-१) (२-१) = ४ X १ = ४]

P = ०.७० ते ०.८० च्या मध्ये.

याचाच अर्थ १०० तील ७० ते ८० वेळा हा फरक योगायोगाने येतो आणि फक्त २० ते ३० वेळा तो खराखुरा येतो. त्यामुळे येथे आढळलेल्या फरकाचा विचार न करता आपणांस समतुल्य संभवनीयता परिकल्पना मान्य करावी लागेल. **भारतीय क्रिकेट चमूविषयी क्रिकेट शौकिनांमध्ये निश्चित असा मतप्रवाह आढळत नाही असे निदान करावे लागेल.**

ज्या वेळेला संशोधकांला नमुन्याबाबत प्रसामान्य संभव वितरणाची खात्री नसते त्या वेळेला समतुल्य संभाव्यता परिकल्पना मांडावी लागते. (Equal Probability Hypothesis)

ज्या वेळेला व्यक्तिवैशिष्ट्य हे प्रसामान्य विभाजन वक्राप्रमाणे वितरित झालेले आहे असे संशोधकास माहीत असते किंवा त्याचे वितरण प्रसामान्यपणे झालेले आहे किंवा नाही याची खात्री त्याला करून घ्यावयाची असते, त्यावेळी शून्यपरिकल्पनेचा प्रसामान्य संभवनीयता हा प्रकार वापरतात. (Normal Probability Hypothesis) त्याचे एक उदाहरण पाहू या.

एक संशोधक विक्री व्यवस्थापक आहे. त्याच्या मार्गदर्शनाखाली एकूण ४२ विक्रेते काम करतात. त्याने या ४२ विक्रेत्यांची चांगले, समाधानकारक आणि निकृष्ट अशा तीन गटांत वर्गवारी केली. जर विक्रीकला प्रसामान्यपणे वितरित झालेली आहे असा विक्री व्यवस्थापकाचा दावा असेल तर आलेले वितरण ही गोष्ट सिद्ध करते का ? हे पाहण्यासाठी त्याने χ^2 तंत्राचा पुढीलप्रमाणे वापर केला.

(हे प्रसामान्य विभाजन असल्यामुळे १०० तीन गटांची अपेक्षित वारंवारिता अनुक्रमे १६%, ६८%, १६% अशी मानली पाहिजे.) ह्याबाबतचे सांख्यिकीय विश्लेषण कोष्टक ९ मध्ये दिलेले आहे.

	अनुकूल	*तटस्थ*	*प्रतिकूल*	*एकूण*
निरिक्षित वारंवारिता (*f*o)	१६	२०	६	४२
अपेक्षित वारंवारिता (*f*e)	६.७	२८.६	६.७	४२
(*f*o-*f*e)	९.३	८.६	.७	
$(fo\text{-}fe)^2$	८६.४९	७३.९६	०.४९	
$(fo\text{-}fe)^2/fe$	१२.९०	२.५९	.०७	

कोष्टक ९ : प्रसामान्य विभाजनाद्वारे χ^2 चाचणी

χ^2 = १५.५६ $\qquad$ d*f* = २ [(३-१) (२-१) = २ X १ = २]

P < ०.०१

याचाच अर्थ या ठिकाणी पडणारा फरक हा शंभरामध्ये १ पेक्षाही कमी वेळा योगायोगाने किंवा अपघाताने येणार आहे. ९९ पेक्षाही जास्त वेळा फरक खराखुरा येतो आहे. याचा अर्थ असा की,

फरक खरा आहे आणि प्रसामान्य संभवनीयता विवरण परिकल्पना चुकीची आहे. यावरून विक्रीकला प्रसामान्यपणे विभाजित झालेली नसते असे अनुमान विक्री व्यवस्थापकाला काढावे लागेल.

ज्या वेळेला संशोधकाच्या आधारसामुग्रीमधील उत्तरे ही दोनच गटांत विभाजित झालेली असतात, उदाहरणार्थ - जसे, द्विपर्यायी प्रश्न होय/नाही, चूक/बरोबर, योग्य / अयोग्य त्यावेळी उत्तरात अचूकता येण्यासाठी येटस्‌च्या दुरुस्तीचा (Yates' Correction) वापर करावा लागतो. म्हणजे फरकामधून ०.५ वजा करावे लागतात.

म्हणून येटस्‌ची दुरुस्ती नंतर फरक = *f*o-*f*e - ०.५ इतका मानावा लागतो.

(*f*o-*f*e) मधून ०.५ वजा करावे लागतात किंवा विभागणी शेकडेवारीत असेल तर ५% वजा करावयाचे असतात आणि ही दिशांकित परिकल्पना असल्यामुळे निष्कर्ष काढण्यासाठी १/२ p चा वापर करावयाचा असतो. (कारण वक्रातील २ पैकी एका अर्ध्यातच वाढ / घट होऊ शकते.)

अध्यापनासाठी व्याख्यान पद्धती उपयुक्त आहे किंवा नाही असा एका संशोधकाने संशोधनासाठी विषय निवडलेला होता. व्याख्यान पद्धती उपयुक्त आहे असे म्हणणारे ७ विद्यार्थी आणि नाही

म्हणणारे ३ विद्यार्थी आहेत. प्रत्येक अपेक्षित उत्तराची संख्या प्रत्येकी ५ असली पाहिजे. हेच कोष्टक १० मध्ये दर्शविले आहे.

	उपयुक्त आहे	*उपयुक्त नाही*	
निरिक्षित वारंवारिता (*f*o)	७	३	१०
अपेक्षित वारंवारिता (*f*e)	५	५	१०
(*f*o-*f*e)	२	- २	
येटस् दुरुस्तीनंतरचा फरक Yats' Correction (*f*o-*f*e-०.५) ∴ Corrected difference	१.५	१.५	
(*f*o-*f*e.०.५)²	२.२५	२.२५	
(*f*o-*f*e)²/*f*e	०.४५	०.४५	

कोष्टक १० : येटस्‌ची दुरुस्तीच्या वापर करून

χ^2 = ०.९०　　　　d*f* = १

∴ P = ०.३५६　　१/२ P = ०.१७८

ह्याचा अर्थ असा की, १०० पैकी १८ वेळा येणारा फरक योगायोगाने येणारा असून फक्त ८२ वेळाच तो खरा येणार आहे. फरक खरा ठरण्यासाठी तो किमान ९५ वेळा तरी खरा यावा लागतो. तसे येथे घडत नाही. त्यामुळे फरकाचा त्याग करून शून्य परिकल्पनेचा स्वीकार केला पाहिजे आणि **व्याख्यान पद्धती उपयुक्त आहे असा विद्यार्थ्यांचा हमखास कल आणि कौल नाही असे अनुमान मांडावे लागेल.**

(क) २ X २ कॉन्टिजन्सी कोष्टक

संशोधनामध्ये ज्या वेळेला दोन गटांची तुलना करावी लागते. मात्र चलांचे केवळ द्विविभाजन झालेले असते त्यावेळी χ^2 च्या मदतीने दोन गटांतील फरकाची सार्थकता किंवा निरर्थकता शोधायची असते तेव्हा २ X २ चे कॉन्टिजन्सी कोष्टक तयार करून अपेक्षित वारंवारितेचा *f*e चा विचार न करता फक्त *f*o च्या मदतीने χ^2 काढता येतो आणि d*f* ची किंमत १ असल्यामुळे P ची किंमतसुद्धा चटकन काढता येते आणि त्यावरून दोन गटांमध्ये फरक आहे किंवा नाही तेसुद्धा सहज निश्चित करता येते. यासाठी एक उदाहरण पाहू या.

*एका संशोधकाने पुढीलप्रमाणे संशोधन विषयाची निवड केलेली होती. **'अंकगणितातील प्रावीण्यामध्ये मुले मुलींपेक्षा निश्चित वरचढ असतात का त्याचा शोध घेणे'**. त्यासाठी त्यांनी सातवीच्या वर्गातील मुला-मुलींचे दोन गट निवडले आणि त्यांना अंकगणितातील प्रावीण्य चाचणी दिली. मुलांचा गट ४० विद्यार्थ्यांचा तर मुलींचा गट ५० विद्यार्थिनींचा होता. विद्यार्थ्यांना व विद्यार्थिनींना मिळालेल्या गुणांकावरून त्यांचे सामान्यापेक्षा कमी दर्जाचे आणि सामान्यापेक्षा*

वरच्या दर्जाचे अशा दोन उपगटात प्रत्येक गटाचे विभाजन केले. अंकगणिती प्रावीण्याबाबत मुले मुलींपेक्षा निश्चित वरचढ असतात का ? ते पाहण्यासाठी त्यांनी कोष्टक ११ प्रमाणे सांख्यिकीय विश्लेषण केले.

(येथे चौकटींना A, B, C, D असे समांतर पद्धतीने नामाभिधान करायचे असते हे लक्षात ठेवावे. चक्रीय पद्धतीने करू नये.)

	सामान्यापेक्षा कमी	*सामान्यापेक्षा जास्त*	*एकूण*
मुले	(A) १७	(B) २३	A+B ४०
मुली	(C) २८	(D) २२	C+D ५०
	A+C = ४५	B+D = ४५	N (A+B+C+D) = ९०

कोष्टक ११ : प्रावीण्य चाचणीतील फरक

अशा वितरणाचा χ^2 काढण्यासाठी पुढील सूत्राचा वापर करतात.

$$\chi^2 = \frac{N\,(AD - BC)^2}{(A+B)\,(C+D)\,(A+C)\,(B+D)}$$

$$= \frac{९० \,(१७ \times २२ - २३ \times २८)^2}{४० \times ५० \times ४५ \times ४५}$$

$$\chi^2 = \frac{९० \,(३७४ - ६४४)^2}{४० \times ५० \times ४५ \times ४५}$$

$$= १.६२$$

या ठिकाणी $df = १$ $\chi^2 = १.६२$

कोष्टकावरून P ची किंमत ०.२० ते ०.३० च्या दरम्यान आहे. याचा अर्थ, दोन गटांत येणारा फरक १०० पैकी २० ते ३० वेळा योगायोगाने आणि फक्त ७० ते ८० वेळाच खरा येतो. म्हणून येणारा फरक दुर्लक्षणीय ठरून संशोधकाने पुढीलप्रमाणे निष्कर्ष काढला.

अंकगणिती प्रावीण्याच्या बाबतीत मुलामुलींमध्ये फरक आढळून येत नाही. मुलींपेक्षा मुले अंकगणिती प्रावीण्यात वरचढ नसतात किंवा मुलांपेक्षा मुलीही हिणकस नसतात.

(ख) ३ x ३ कॉन्टिजेन्सी कोष्टक

ज्यावेळेला संशोधकाला अपेक्षित चलाची तीन किंवा तीनापेक्षा जास्त गटांमध्ये विभागणी करून त्यांच्यातील फरक खरा किंवा खोटा आहे, हे पाहावयाचे असते त्यावेळी ३ x ३, आणि दोन्ही चलांचे ४ गटांत विभाजन असेल तर त्यावेळी विश्लेषणासाठी ४ x ४ कॉन्टिजेन्सी कोष्टकाचा वापर करावा लागतो.

मानसशास्त्रातील व्यक्तिवैशिष्ट्यांबाबत एका संशोधकाने संशोधन कार्य हाती घेतले त्यात त्यांनी डोळ्यांचा आणि हाताच्या प्रधान वापराचा परस्परांशी काहीही संबंध नाही अशी परिकल्पना मांडली. (उदाहरणार्थ, डावखोरी व्यक्ती पाहण्यासाठी डाव्या डोळ्याचाच प्राधान्याने उपयोग करते असे नाही.)

त्यांनी ह्या प्रयोगासाठी ४१३ व्यक्तींची निवड केली होती. त्यात डाव्या हातासाठी डावा डोळा दोन्ही डोळे आणि उजव्या डोळ्याने कार्य करणाऱ्या व्यक्तींची संख्या अनुक्रमे पुढीलप्रमाणे होती - ३४, ६२, २८. दोन्ही हातासाठी डावा डोळा, दोन्ही डोळे आणि उजव्या डोळ्याने काम करणाऱ्या व्यक्तींची संख्या अनुक्रमे २७, २८, २० होती तर उजव्या हाताचा वापर करणारा डावा डोळा, दोन्ही डोळे आणि उजव्या डोळ्याने काम करणाऱ्या व्यक्तींची संख्या अनुक्रमे ५७, १०५, ५२ होती. ह्यासाठी संशोधकाने प्रथम कोष्टक १२ प्रमाणे वर्गीकरण तयार केले.

	डावा डोळा प्रधान	*दोन्ही डोळ्यांचा वापर*	*उजवा डोळा प्रधान*	*एकूण*
डाव्या हाताचा वापर प्रधान (*f*o)	३४ (A)	६२ (B)	२८ (C)	१२४ (A+B+C)
दोन्ही हातांचा वापर (*f*o)	२७ (D)	२८ (E) (D+E+F)	२० (F)	७५
उजव्या हाताचा वापर प्रधान	५७ (G)	१०५ (H)	५२ (I)	२१४ (G+H+I)
	११८ (A+D+G)	१९५ (B+E+H)	१०० (C+F+D)	४१३ (A+B+C+ D+E+F+ G+H+I)

कोष्टक १२ : डोळे आणि हाताचा वापर यांचे प्राधान्य

प्रत्येक चौकटीची अपेक्षित वारंवारिता (fe) काढण्यासाठी -

$$fe = \frac{\text{स्तंभातील व्यक्तींची संख्या} \times \text{ओळीतील व्यक्तींची संख्या}}{\text{एकूण विद्यार्थी संख्या}}$$

या सूत्राचा वापर केला.

ह्यावरून -

$$\text{चौकट } A\ (fe) = \frac{(A+D+G) \times (A+B+C)}{N}$$

$$= \frac{११८ \times १२४}{४१३} = ३५.४$$

$$\text{चौकट } D\ (fe) = \frac{(A+D+G) \times (D+E+F)}{N}$$

$$= \frac{११८ \times ७५}{४१३} = २१.४$$

$$\text{चौकट } G\ (fe) = \frac{(A+D+G) \times (G+H+I)}{N}$$

$$= \frac{११८ \times २१४}{४१३} = ६१.१$$

$$\text{चौकट } B\ (fe) = \frac{(B+E+H) \times (A+B+C)}{N}$$

$$= \frac{१९५ \times १२४}{४१३} = ५८.५$$

$$\text{चौकट } E\ (fe) = \frac{(B+E+H) \times (D+E+F)}{N}$$

$$= \frac{११५ \times ७५}{४१३} = ३५.४$$

$$\text{चौकट H } (fe) = \frac{(B+E+H) \times (G+H+I)}{N}$$

$$= \frac{११५ \times २१४}{४१३} = १०१.०$$

$$\text{चौकट C } (fe) = \frac{(C+F+D) \times (A+B+C)}{N}$$

$$= \frac{१०० \times १२४}{४१३} = ३०.०$$

$$\text{चौकट F } (fe) = \frac{(C+F+D) \times (D+E+F)}{N}$$

$$= \frac{१०० \times ७५}{४१३} = १८.२$$

$$\text{चौकट I } (fe) = \frac{(C+F+D) \times (G+H+I)}{N}$$

$$= \frac{१०० \times २१४}{४१३} = ५१.८$$

प्रत्येक चौकटीची *f*o - *f*e

चौकट A = ३४ - ३५.४ = - १.४

चौकट B = ६२ - ५८.५ = ३.५

चौकट $C = २८ - ३० = - २.०$

चौकट $D = २७ - २१.४ = ५.६$

चौकट $E = २८ - ३५.४ = - ७.४$

चौकट $F = २० - १८.२ = १.७८$

चौकट $G = ५७ - ६१.१ = - ४.१$

चौकट $H = १०५ - १०१ = ४$

चौकट $I = ५२ - ५१.८ = ०.२०$

प्रत्येक चौकटीसाठी

$$\frac{(fo - fe)^2}{fe}$$

$$A = \frac{(- १.४)^२}{३५.४} = .०५५$$

$$B = \frac{(३.५)^२}{५८.५} = ०.२०१$$

$$C = \frac{(- २.०)^२}{३०} = ०.१३३$$

$$D = \frac{(५.६)^२}{२१.४} = १.४६५$$

$$E = \frac{(- ७.४)^२}{३५.४} = १.५४७$$

$$F = \frac{(१.७८)^२}{१८.२} = ०.१७४$$

$$G = \frac{(- ४.१)^२}{६१.१} = ०.२७५$$

$$H = \frac{(४.०)^२}{१०१.०} = ०.१५८$$

$$I = \frac{(०.२०)^२}{५१.८} = ०.००१$$

$$\therefore \chi^2 = \Sigma \frac{(fo - fe)^2}{fe}$$

एकूण =

χ^2 = ०.०५५ + ०.२०९ + ०.१३३ + १.४६५ + १.५४७ + ०.१७८ + ०.२७५ + ०.१५८

= ४.०२ df = (३ - १) (३ - १) = ४

P = ०.३० आणि ०.५० च्या दरम्यान आहे.

यावरून विद्यार्थ्यांमध्ये पडणारा फरक हा १०० त ३० ते ५० वेळा योगायोगाने येतो आणि फक्त ५० ते ७० वेळा फरक खरा येतो आहे. म्हणून संशोधकाने पुढीलप्रमाणे निष्कर्ष काढला. ह्याचा अर्थ, **फरक सार्थ नसून शून्य परिकल्पनाच खरी आहे म्हणून डोळ्यांचा वापर करण्याचा प्रकार आणि हाताचा वापर करण्याचे प्रकार या दोन्ही गोष्टी वेगवेगळ्या असून त्यांच्यामध्ये कुठल्याही प्रकारचा सहसंबंध नाही. यावरून संशोधक असे निश्चित अनुमान काढू शकतो की, डाव्या हाताने काम करणारे डाव्या डोळ्यानेच पाहतात किंवा उजव्या हाताने काम करणारे उजव्या डोळ्याचाच प्राधान्याने वापर करतात असे ठामपणे म्हणता येणार नाही.**

(इ) संकलित χ^2 गुणधर्म (Additive Property of χ^2)

ज्यावेळी एका नमुन्यावर पुन्हा पुन्हा प्रयोग केले जातात किंवा समतुल्य न्यादर्शावर अनेक वेळा प्रयोग केले जातात तेव्हा मिळालेल्या माहितीवरून χ^2 काढला असता काही वेळा फरक सार्थ असल्याचे दिसते तर काही वेळेला तो सार्थ नसल्याचे सिद्ध होते. अशा वेळी संशोधकाने पहिल्याच प्रयोगात अंतिम निष्कर्ष न काढता योग्य निष्कर्ष काढण्यासाठी संकलित χ^2 गुणधर्माचा वापर करावयाचा असतो.

ह्यालाच χ^2 ची बेरीज करण्याचा गुणधर्म असे म्हणतात.

उदाहरणार्थ, अंकगणितातील प्रावीण्याविषयी सातवीतील मुला-मुलींवर संशोधकाने जो प्रयोग केला होता, त्यात -

सर्वप्रथम df = १ χ^2 = १.६२ P > ०.२० होते.

त्यानंतर या संशोधकाने याच आकाराचे सातवीमधील मुला-मुलींचे आणखी तीन संच घेतले आणि त्यांच्यावर हाच प्रयोग केला असता त्याला पुढीलप्रमाणे माहिती मिळाली.

संच २- df = १ χ^2 =२.७१ P = ०.१० - दोन गटांतील फरक सार्थ नाही.

संच ३- df = १ χ^2 =५.३९ P = ०.०२फरक सार्थ आहे.

संच ४- df = १ χ^2 =०.१५ P = ०.७० फरक सार्थ नाही.

म्हणजेच चारपैकी तीन गटांमध्ये χ^2 सार्थ ठरलेला नाही. परंतु एका गटाच्या बाबतीत मात्र तो सार्थ ठरलेला आहे, अशा वेळी सर्व df आणि सर्व χ^2 ची बेरीज करतात. एकत्रित df साठी एकत्रित χ^2 सार्थ ठरतो की नाही हे पाहून निष्कर्ष काढला जातो. त्यास संकलित / काय स्क्वेअर (χ^2) गुणधर्म असे म्हणतात.

$\therefore \sum df$ = ४: [१+१+१+१]

$\sum \chi^2$ = १.६२ + २.७१ + ५.३९ + ०.१५

$\sum \chi^2$ = ९.८७

जेव्हा df = ४ आणि χ^2 = ९.८७ असतात.

अशा वेळी कोष्टकावरून P < ०.०५

म्हणून दोन गटांतील फरक सार्थ आहे.

यावरून संशोधक असा निष्कर्ष मांडू शकतो की, अंकगणिती प्रावीण्याच्या बाबतीत मुलींपेक्षा मुले उच्च दर्जाची संपादणूक मिळवितात.

एकाच प्रयोगातून ज्या वेळेला फरकाच्या सार्थकतेविषयी संशोधकाच्या मनामध्ये संशय निर्माण होतो किंवा फरक आहे अशी खात्री असते पण ते सिद्ध करता येत नाही त्या त्या वेळी संशोधकाने त्याच गटावर अनेकवार प्रयोग करून किंवा समतुल्य न्यादर्श घेऊन संकलित χ^2 गुणधर्माचा वापर करावा आणि फरक सार्थ आहे किंवा निरर्थक आहे ते एकत्रिकरणावरून सांगावे. प्रयोग-पडताळणी-पुनर्प्रयोग हे वैज्ञानिक पद्धतीचे चक्रच आहे.

(ई) टक्केवारीसाठी χ^2 चा वापर कसा करावा ?

χ^2 हा टक्केवारीनेसुद्धा काढता येतो. त्यासाठी आपण एका प्रयोगाची माहिती घेऊ. उदाहरणार्थ, एका संशोधकाने एक नाणे अनेक वेळा उडवले. तेव्हा ५६% वेळा छापा तर ४४% वेळा काटा पडले. जर संशोधकाने १००० वेळा नाणे उडवले असेल तर छापा आणि काटा पडण्यावरून नाणे खरे की खोटे हे सांगता येईल का ? हेच कोष्टक १३ मध्ये दाखविले आहे.

	छापा	*काटा*
fo	५६%	४४%
fe	५०%	५०%
fo-fe	६%	६%
येटस्‌ची दुरुस्ती करून *fo-fe* - ५%	१%	१%
$\frac{(fo\text{-}fe - ५\%)^2}{fe}$	०.०२	०.०२

कोष्टक १३ : छापा व काटा पडण्याचे प्रमाण

$$\chi^2 = \frac{\sum (fo\text{-}fe - 5\%)^2}{fe}$$

= ०.०२ + ०.०२ = ०.४

१००० वारंवारितेसाठी वास्तव $\chi^2 = \frac{०.४}{१} \times \frac{१०००}{१००} = ०.४$, $df = १$

$\therefore$ P = .५०

ह्याचा अर्थ हा फरक योगायोगाने १०० पैकी ५० वेळा येऊ शकतो म्हणून शून्य परिकल्पनेचा स्वीकार करून फरक खोटा आहे असे मानले पाहिजे आणि नाणे बनावट नसून खरे आहे असे सांगितले पाहिजे.

सरावासाठी स्वाध्याय

(अ) संशोधनाच्या कोणत्या आधारसामुग्रीसाठी काय स्क्वेअर चाचणीचा वापर करावा ते उदाहरणासह स्पष्ट करा.

(आ) एका संशोधकाने क्रमान्वित स्वयं-अध्यापन साहित्य आणि पारंपरिक साहित्यातून विद्यार्थ्यांच्या होणाऱ्या अध्यापनावर त्यांच्या अध्यापन अनुभव वर्षांचा परिणाम होतो, अशी परिकल्पना मांडलेली आहे. ही परिकल्पना पुढील आधारसामुग्रीवरून सिद्ध होते का ? ते पडताळून पहा.

	अध्यापन (२-११ वर्षे)	*अनुभव (१२-२३ वर्षे)*
क्रमान्वित अध्यापन साहित्य	२६	०६
पारंपरिक अध्यापन साहित्य	२२	१०

(४) विलकॉक्सन - मॅनव्हिटने चाचणी

या चाचणीचा नमुना प्रथम मॅन व व्हिटने यांनीच विकसित केलेला आहे. नंतर विलकॉक्सन यांनी त्यात काही दुरुस्त्या करून नव्याने तिचे प्रमाणीकरण केलेले आहे म्हणून ही चाचणी विलकॉक्सन - मॅनव्हिटने चाचणी किंवा नुसती विलकॉक्सन चाचणी म्हणून ओळखली जाते. सर्व अपरिमितीय चाचण्यांमध्ये ही एक प्रभावशाली चाचणी म्हणून ओळखली जाते. परिमितीय चाचणीतील t चाचणीला पर्याय म्हणून अपरिमितीय आधारसामुग्रीच्या विश्लेषणासाठी या चाचणीचा मोठ्या प्रमाणात वापर केला जातो.

या चाचणीचा उपयोग पुढील दोन परिस्थितीत केला जातो.

(१) जेव्हा संशोधकाला t चाचणीसाठी आवश्यक असलेली गृहितके टाळावयाची असतात.

(२) संशोधकाने केलेले मापन हे आंतरश्रेणीपेक्षा दुर्बल दर्जाचे असेल तेव्हा. **म्हणजेच ते नामांकन किंवा क्रमांकन श्रेणीतील असेल तेव्हा.**

ही चाचणी आपण प्रथम समजावून घेऊ.

समजा X आणि Y हे दोन न्यादर्श एकाच लोकसंख्येमधून निवडले आहेत. X आणि Y चे वितरण एकसमान आहेत, अशी शून्य परिकल्पना संशोधकाने मांडलेली आहे.

(संख्याशास्त्रात शून्य परिकल्पनेसाठी H_0 आणि दिशांकित परिकल्पनेसाठी H_1 हे संकेत वापरले जातात.)

★ X मधील गुणांक, Y मधील गुणांकापेक्षा मोठे असतील आणि ($P[X>Y] > १/२$) ही संभवनीयता १/२ पेक्षा अधिक गुणांकाबाबतीत अनुभवास येत असेल तर X ह्या जनसंख्या संचाचे बहुसंख्य घटक Y ह्या जनसंख्या संचाच्या घटकापेक्षा जास्त मोठे असतील.

★ संशोधकास शून्य परिकल्पना स्वीकृत करावयाची असेल तर H_0 च्या बाबतीत $p[X > Y] = १/२$ म्हणजेच X गटातील फक्त निम्मेच गुणांक Y गटातील निम्म्या गुणांकापेक्षा मोठे असतील.

★ संशोधकाने Y गटातील गुणांक X गटातील गुणांकापेक्षा मोठे आहेत असे मांडले तर त्यास $P[X > Y] < १/२$ असे मांडावे लागेल. ह्याचा अर्थ असा होईल की, Y गटातील बहुसंख्य गुणांक हे X गटातील बहुसंख्य गुणांकापेक्षा मोठे असतील.

द्विपुच्छ चाचणीच्या बाबतीत जेव्हा दोन्ही गुणांकातील फरकाची दिशा आपणांस निश्चित सांगता येत नाही त्यावेळी H_1 ही परिकल्पना मांडताना संशोधकाला म्हणावे लागेल की $P[X > Y] \neq १/२$.

संशोधकाला मध्यांकाच्या स्वरूपातही पुढीलप्रमाणे परिकल्पना मांडता येईल. ती अशी -

X गुणांकाचा मध्यांक हा Y गुणांकाच्या मध्यांकापेक्षा मोठा आहे. त्यासाठी H_1 मांडताना $Q_x > Q_y$.

Q_x हा X गटाचा मध्यांक आहे तर Q_y हा Y गटाचा मध्यांक आहे. हे मान्य करायचे नसेल तर दुसरे H_1 आपणांस $Q_y > Q_x$ असे मांडता येईल. या चाचणीची ही तात्त्विक माहिती समजावून घेतल्यानंतर प्रत्यक्ष या चाचणीचा वापर संशोधनात कसा केला जातो, ते समजावून घेऊ या !

विलकॉक्सनची फरकाची सार्थकता ठरविण्याची पद्धत

संशोधकाकडे न्यादर्शाचे X आणि Y असे दोन गट आहेत. X न्यादर्शामध्ये m इतक्या व्यक्ती आहेत तर Y न्यादर्शामध्ये n इतक्या व्यक्ती आहेत. या दोन न्यादर्शामध्ये कुठलाही सहसंबंध नसून ते पूर्णपणे स्वतंत्र आहेत. म्हणून संशोधकाने ह्या चाचणीचा पुढील पायऱ्यांनुसार वापर केला.

* दोन्ही न्यादर्शातील गुणांक एकत्रित मांडून त्यांना वाढत्या किंमतीप्रमाणे क्रमांक देण्यात आले. (म्हणजेच सर्वात लहान गुणांकाला १ क्रमांक आणि सर्वात मोठ्या गुणांकाला शेवटचा क्रमांक देण्यात आला). येथे लहान गुणांकाला लहान क्रमांक आणि मोठ्या गुणांकाला मोठे क्रमांक मिळतात.

स्पिअरमनचा सहसंबंध गुणांक काढताना घ्यावयाच्या क्रमांकन पद्धतीच्या नेमकी उलट क्रमदेय देणारी ही पद्धती आहे. X आणि Y मधील गुणांक पुढे दिले आहेत.

X : ९, ११, १५ Y : ६, ८, १०, १३

(१) एकत्रित गुणांक ६, ८, ९, १०,११,१३,१५

↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓

गटाचा प्रकार Y, Y, X, Y, X, Y, X

↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓

क्रमांकन १, २, ३, ४, ५, ६, ७,

(२) Wx = X गटातील गुणांकाच्या क्रमांकाची बेरीज होय.

(३) Wy = Y गटातील गुणांकाच्या क्रमाकांची बेरीज होय.

Wx = ३+५+७ = १५

Wy = = १ + २ + ४ + ६ = १३

Wx + Wy = १५ + १३ = २८

पहिल्या N आकड्यांची बेरीज =

$$= \frac{N(N+१)}{२} = \frac{७(७+१)}{२}$$

$$= \frac{७ \times ८}{२} = २८$$

ह्यावरून

$$\frac{N(N+1)}{२} = Wx + Wy = १५ + १३ = २८$$

जर शून्य परिकल्पना खरी असेल तर दोन्ही गटांतील सरासरी क्रमांक जवळपास सारखे आले पाहिजे. Wx साठी न्यादर्श वितरण कसे असेल हे आपणांस माहीतअसते. त्यावरून प्रत्यक्ष निरीक्षणात आलेली किंमत टोकाची आहे किंवा काय ह्याचा मागोवा घेता येतो. त्यासाठी विलकॉक्सनने एक कोष्टकही तयार करून दिलेले आहे. त्यावरून P ची किंमत (फरक योगायोगाने येण्याची संभवनीयता) मिळू शकते. ह्यासाठी संख्याशास्त्राच्या पुस्तकात J क्रमांकाचे कोष्टक दिलेले असते. ते परिशिष्ट - ५ मध्ये देण्यात आलेले आहे. त्यात वरच्या आडव्या रकान्यात m ची किंमत आणि उभ्या रकान्यात n आणि Wx च्या क्रांतिक किंमतीसाठी P ची किंमत दिलेली असते.

वरील उदाहरणात m = ३ दिलेले आहेत आणि n = ४ धरून Wx ची क्रांतिक किंमत (Critical value) (Cv = १५) पाहिले तर P = ०.२०० असे दिलेले आहे. ह्याचाच अर्थ १०० तील २० वेळा हा फरक योगायागाने वा अपघाताने येतो. ८० वेळा तो खरा येतो. असे फरक आपण मान्य करीत नाहीत. म्हणून फरकाचा त्याग करून आपण शून्य परिकल्पना मान्य करतो. प्रायोगिक आणि नियंत्रित गटाच्या प्राप्तांकात फरक नाही असा निष्कर्ष संशोधक काढू शकतो.

जर एका गटातील गुणांकांची क्रमांकन बेरीज दुसऱ्या गटाच्या क्रमांकन बेरजेपेक्षा खूपच मोठी किंवा खूप लहान असेल तरच आपण असा अंदाज काढू शकतो की, दोन्ही न्यादर्श एकाच लोकसंख्येतील नाहीत. बेरीज जवळपास सारखी असेल तर गटामध्ये फरक नाही असे अनुमान काढता येते.

सरावासाठी स्वाध्याय

एका संशोधकाने पारंपरिक, तसेच नैदानिक उपचारात्मक दृष्टिकोनातून केलेल्या अध्यापनामुळे विद्यार्थ्यांच्या संपादनात फरक पडतो का ? असा संशोधनाचा विषय घेतलेला होता. प्रत्येक गटामध्ये त्याने पाच विद्यार्थी घेतलेले होते. त्यांना मिळालेले गुणांक पुढीलप्रमाणे आहेत. विलकॉक्सन आणि मॅन-व्हिटने चाचणीचा वापर करून निष्कर्ष काढा.

पारंपरिक पद्धतीने अध्यापन करून मिळालेले गुणांक

७, १०, १५, १८, २

नैदानिक उपचारात्मक अध्यापन करून मिळालेले गुणांक

५, ९, १०, १८, १९, ८

आतापर्यंत आपण वर्णनात्मक सांख्यिकी त्याचप्रमाणे संशोधनातून मिळालेल्या आधारसामग्रीचे विश्लेषण करण्यासाठी विविध परिमितीय आणि अपरिमितीय चाचण्यांची माहिती उदाहरणासह समजावून घेण्याचा प्रयत्न केला. या चाचण्यांमधून तुमच्या संशोधनातील परिकल्पना पडताळून पाहण्यासाठी कोणत्या चाचणीचा वापर करावा ते पुढील कोष्टक १४ मध्ये दिलेले आहे. ते प्रथम काळजीपूर्वक वाचा. चाचणी निश्चित करा आणि तुमच्या मार्गदर्शकांशी त्याबाबत चर्चा करा.

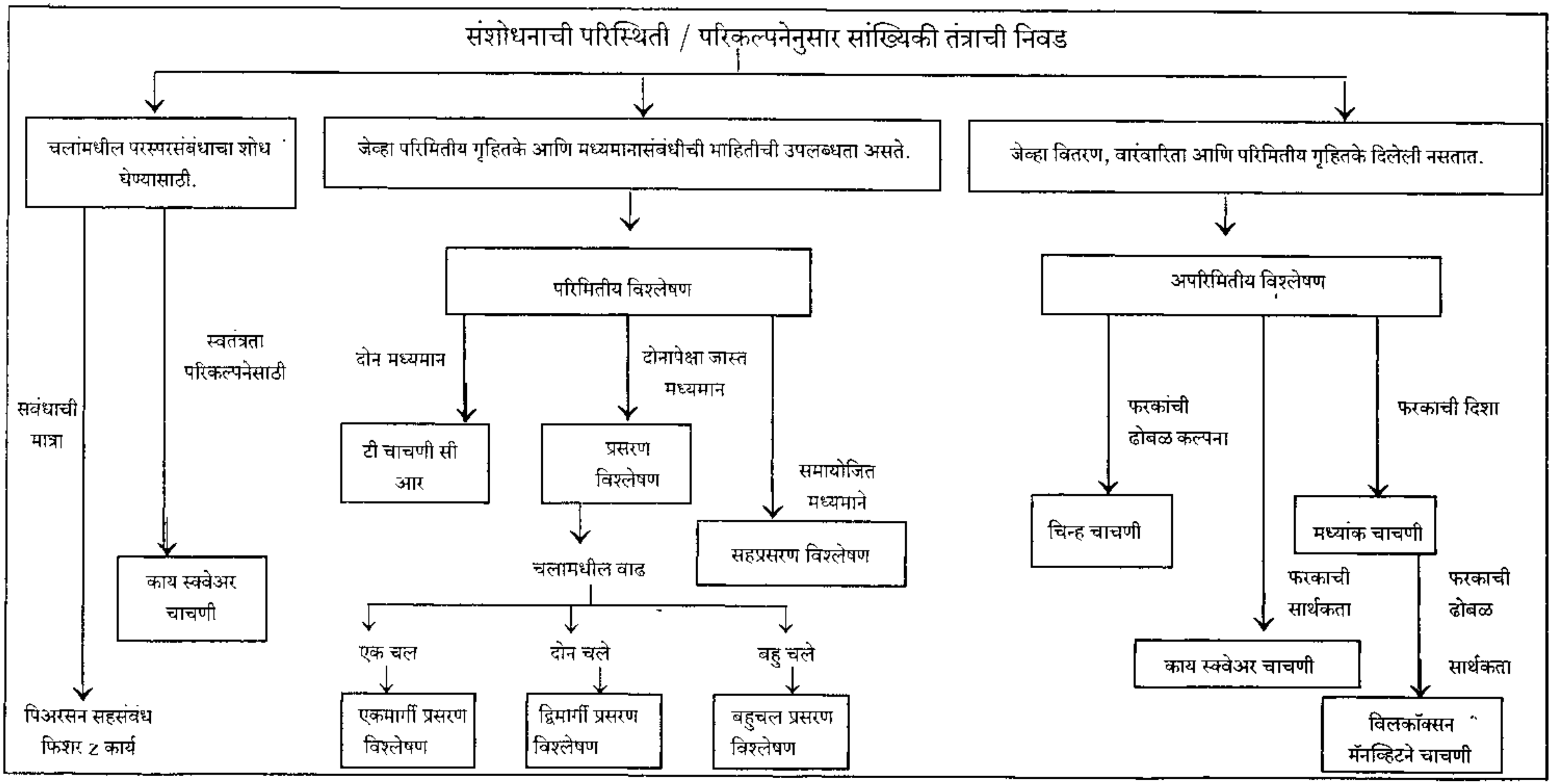
७.० सांख्यिकी तंत्राचा वापर करून परिकल्पनेचा पडताळा

अनुमानात्मक संख्याशास्त्रातील परिकल्पनांचा पडताळा पाहण्यासाठी ज्या सर्वसामान्य सांख्यिकी चाचण्या वापरल्या जातात त्यांची माहिती थोडक्यात पुढे दिलेली आहे. तुम्ही तुमच्या संशोधनात ज्या परिकल्पना निश्चित केलेल्या आहेत. त्यानुसार कोणत्या सांख्यिकीय चाचणीचा वापर तुम्हांला करता येईल. ह्यासंबंधीचे निर्वाचन करताना कोष्टक १४ वरून काही सूत्रे तुम्हांला लक्षात घेता येतील.

सांख्यिकीय चाचणी	*परिकल्पनांची तपासणी*
(अ) परिमितीय चाचण्या टी-चाचणी (प्रसामान्य विभाजनासाठी वापर)	* एक मध्यमान, दोन मध्यमानातील (पूर्व-उत्तर चाचणी) फरक स्वतंत्र किंवा अवलंबित न्यादर्शासाठी वापर * सूत्रामध्ये फरक M_1-M_2 = 0 म्हणून $M_1 = M_2$ व्यवहारात $M_1 - M_2 \neq 0$
(१) प्रसरण विश्लेषण (एकमार्गी) एफ चाचणी	* दोन किंवा दोनापेक्षा जास्त न्यादर्शाचे मध्यमान समान आणि * एक स्वतंत्र / स्वाश्रयी चलाचा विचार करावयाचा असेल तर.
(२) प्रसरण विश्लेषण (द्विमार्गी)	* दोन किंवा दोनापेक्षा जास्त न्यादर्शाचे मध्यमान समान आणि * दोन स्वतंत्र / स्वाश्रयी चलाचा विचार करावयाचा असेल तर. * प्रत्येक चलावर एक स्वतंत्र परिकल्पना * चलांच्या आंतरक्रियेवर आधारित परिकल्पना असेल तर
(३) सहप्रसरण विश्लेषण	सहचलाच्या परिणामाची तडजोड करून दोन किंवा दोनापेक्षा जास्त न्यादर्शाचे मध्यमान समान असेल तर न्यादर्शात सहसंबंध नेमका माहीत असेल तर
(आ) अपरिमितीय चाचण्या	
(१) चिन्ह चाचणी	* गुणांक क्रमांकन शलाकेतील असतील तेव्हा.
(२) χ^2 मध्यांक चाचणी (Median Test)	* दोन न्यादर्शातील मध्यांक समान असतील तेव्हा.
(३) χ^2 चाचणी (Contigency Table)	* न्यादर्शातील दोन चले स्वतंत्र असतील तेव्हा.
(४) विलकॉक्सन मॅन व्हिटने चाचणी	* दोन न्यादर्शातील गुणांमध्ये फरक नसेल तेव्हा.

कोष्टक १४ : सांख्यिकीय चाचणी आणि परिकल्पनांची तपासणी

वरील तक्त्यावरून तुम्ही तुमच्या संशोधनाच्या परिकल्पनेनुसार चाचणी निश्चित केलेली आहे असे मानले तर ही निवड योग्य आहे का ? त्याचा पडताळा पाहण्यासाठी पुढे एक रेखाचित्र दिलेले आहे. हे रेखाचित्र वाचण्याअगोदर तुमच्या संशोधनातून मिळालेल्या आधारसामुग्री आणि परिकल्पना समोर ठेवा. रेखाचित्रातील पहिल्या तीन चौकटींमधील कोणती चौकट तुमच्या आधारसामुग्रीसाठी लागू होते ते प्रथम निश्चित करा. त्यानंतरच त्या चौकटीखालील छोट्या चौकोनांचा आणि चौकोनाला जोडलेल्या रेषेवर लिहिलेल्या माहितीवरून सांख्यिकी विश्लेषणासाठी चाचणी निश्चित करा.



आकृती ४ : सुयोग्य सांख्यिकी चाचणी निवडण्यासाठी निर्णय वृक्ष

तुम्ही संशोधनासाठी आधारसामग्रीनुसार चाचणी निश्चित केली. या चाचणीच्या साहाय्याने तुम्हांला तुमच्या आधारसामग्रीचे विश्लेषण करावयाचे आहे. हे विश्लेषण तुम्ही वैज्ञानिक गणक यंत्राच्या (Scientific Calculator) साहाय्याने करू शकाल. त्याबाबतची सविस्तर माहिती मूलभूत सांख्यिकीमध्ये दिलेली आहे. तुम्हांला संगणक उपलब्ध असेल तर त्यातील विविध मृदूसाहित्याचा (Software) वापर तुम्ही करू शकाल. त्याचप्रमाणे सांख्यिकी विश्लेषणासाठी प्रगत असे विद्यापीठामध्ये एस.पी. एस.एस. (Statistical Package for Social Science) हे मृदूसाहित्य उपलब्ध आहे. त्यासाठी आधारसामग्री कशी द्यावी, ह्याबाबत पुढे सविस्तर माहिती दिलेली आहे.

८.० विविध साधनांचा वापर करून सांख्यिकीय विश्लेषण

वैज्ञानिक गणकयंत्र (Scientific Calculator) यामध्ये मूलभूत अशा सहा बैजिक क्रिया +, -, x, ÷, शेकडेवारी आणि वर्गमूळ ह्या करण्याची साध्या गणकयंत्राची तरतूद तर असतेच पण त्या जोडीला अनेक बीजगणितीय / भौमितिक / त्रिकोणमितीय सूत्रांचा वापर करून उदाहरणांची किंवा समस्यांची उत्तरेसुद्धा मिळू शकतात. वैज्ञानिक गणकयंत्र म्हणजे सहज हाताळता येईल असा सोपा संगणकच असतो आणि संशोधकांचा आकडेमोडीचा व सूत्राच्या उपयोजनांचा त्रास त्यामुळे वाचू शकतो. मायक्रो इलेक्ट्रॉनिक्समधील क्रांतीमुळे त्याची किंमत आजमितीला खूपच कमी झालेली असून तो विकत घेणे तुम्हाला परवडू शकते. ह्याचा वापर करून आकडेमोड कशी करावी, हे विभाग - १ मध्ये सविस्तर दिलेले आहे.

वैज्ञानिक गणकयंत्रापेक्षाही अतिशय जलद आकडेमोडी, गुंतागुंतीची सूत्रे आणि समीकरणे फार मोठ्या आधारसामुग्रीचे सूक्ष्मातिसूक्ष्म विश्लेषण यासाठी संगणकाचा खूप परिणामकारक उपयोग करता येतो. संगणकाचे काम ज्या कार्यक्रमाधारे चालते त्याला मृदूसाहित्य (Software) असे म्हणतात.

संगणकाच्या साहाय्याने सामुग्रीवरून इतरही अनेक प्रकारचे आलेख काढता येतात. सांख्यिकी माहितीचे विश्लेषणही, मृदूसाहित्याच्या मदतीने करता येते. त्याबाबतची थोडक्यात माहिती पुढे दिलेली आहे.

सांख्यिकी विश्लेषणासाठी संगणकाचा वापर

सांख्यिकी विश्लेषणासाठी SPSS, SPA हे मृदूसाहित्य (Software) उपलब्ध आहेत. परंतु ते तुम्हांला विकत घ्यावे लागते. त्याऐवजी आज विंडो २००० (Window 2000) या सॉफ्टवेअरमध्ये वर्ड २००० मध्ये अहवालाचे टंकलेखन, एक्सेल २००० मध्ये सांख्यिकीचे विश्लेषण, पॉवर पॉईटमध्ये आकृत्या किंवा चित्रपट्टिका तयार करता येतात. या सर्व सुविधा विंडो २००० मध्ये उपलब्ध असल्यामुळे तुमच्याकडे संगणक उपलब्ध असल्यास अहवालाचे संपूर्ण कार्य तुम्ही स्वत: करू शकाल. सांख्यिकी विश्लेषणासाठी एक्सेल २००० चा वापर केला जातो. त्यामुळे सांख्यिकी विश्लेषणासाठी स्वत: आकडेमोड (Manually) करण्याची आवश्यकता नसते. तुम्ही स्वत: किंवा एखाद्या संगणक चालकाकडून सर्व विश्लेषण करून घेऊ शकाल आणि समग्र अहवालसुद्धा संगणकावरच तयार करू शकाल.

हे विश्लेषण करण्याअगोदर तुम्हांला पुढील प्रश्नांची उत्तरे घ्यावी लागतील.

(१) सांख्यिकीचे विश्लेषण वर्णनात्मक पद्धतीने करावयाचे आहे का ? उदाहरणार्थ - मध्यमान, प्रमाण विचलन.

(२) सांख्यिकीचे विश्लेषण अनुमानात्मक पद्धतीने करावयाचे आहे का ? उदाहरणार्थ टी - चाचणी, एफ - चाचणी, काय स्क्वेअर.

(३) संशोधनात कोणकोणत्या परिकल्पना निश्चित केलेल्या आहेत ? ह्या परिकल्पना एकपुच्छ की द्विपुच्छ आहेत.

(४) संशोधनातील स्वाश्रयी आणि आश्रयी चले कोणकोणती आहेत ? एकापेक्षा जास्त स्वाश्रयी चल असल्यास मध्यस्थ चल कोणते आहे ?

(५) न्यादर्श कोणत्या पद्धतीने निवडलेला आहे ?

दुसऱ्या व्यक्तीकडून तुम्ही सामग्री विश्लेषण करून घेणार असाल तर त्या व्यक्तीला, तुम्हांला, त्याचेकडून कोणती मदत अपेक्षित आहे हे सांगावे लागेल. स्वत: करणार असाल तर एक्सेलची प्राथमिक माहिती तुम्हांला असणे आवश्यक आहे. यासंदर्भात अधिक माहितीसाठी मुक्त विद्यापीठाचे Window 95 : उपयोजन या पुस्तकाचे सविस्तर वाचन करा. एक्सेल संदर्भात अनेक संदर्भपुस्तके बाजारात उपलब्ध आहेत. त्यांच्या साहाय्याने आपण एक्सेल शिकू शकाल. एक्सेलची प्राथमिक माहिती तुम्हांला असल्यास सांख्यिकीय विश्लेषणासाठी त्याचा वापर अवश्य करा.

संगणकातील एक्सेल या मृदूसाहित्याच्या साहाय्याने तुम्ही स्वत: तुमच्या माहितीचे विश्लेषण करू शकाल. या मृदूसाहित्यामध्ये मूलभूत सांख्यिकी त्याचप्रमाणे प्रगत सांख्यिकीमधील काही तंत्रे उपलब्ध आहेत. उदाहरणार्थ, एकमार्गी प्रसरण विश्लेषण, पिअरसन सहसंबंध. जर तुम्ही सर्वेक्षण किंवा प्रायोगिक पद्धतीने संशोधन कार्य पूर्ण केलेले असेल आणि संशोधनातील निष्कर्षांची सत्यता पडताळून पाहवयाची असेल तर तुम्हाला सांख्यिकी तंत्र वापरून त्याचे विश्लेषण करावे लागेल. तुम्ही मिळविलेल्या माहितीचे तुम्हांला स्वत:ला विश्लेषण करणे शक्य नसेल तर टी.आय.एस.एस. मुंबई, गोखले इन्स्टिट्यूट, पुणे, आय.सी.एस.एस.आर. त्याचप्रमाणे विद्यापीठातर्फेही सामाजिक शास्त्र सांख्यिकीय विश्लेषण (Statistical Package for Social Science) या मृदूसाहित्याद्वारे केले जाते. यांपैकी कोणत्याही ठिकाणाहून तुम्हांला तुमच्या आधारसामग्रीचे विश्लेषण करून मिळते. त्यासाठी पुढील तीन पद्धतीने आधारसामग्री तुम्हांला घेता येईल.

पद्धत १ - तुम्ही माहिती / आधारसामग्री. संगणकातील Word, Excel या मृदूसाहित्यात साठवून ते फ्लॉपीत कॉपी करून घ्यावे आणि त्याचप्रमाणे त्याची एक मुद्रित प्रत वरीलपैकी कोणत्याही संस्थेकडे घेऊन जा. **यासाठी एक्सेलमधील उभ्या रकान्यात चले घेऊन आडव्या ओळीत न्यादर्शाची, व्यक्तींची माहिती द्यावी.**

पद्धत २ - आपल्याकडे संगणक उपलब्ध नसल्यास संशोधनातील चलांची निश्चिती करून उभ्या रकान्यात चले लिहून आडव्या रकान्यात न्यादर्शातील व्यक्तींची माहिती घेऊन त्याची नोंद करावी.

पद्धत ३ - तुम्ही तुमच्या प्रश्नावल्या या संस्थांमध्ये नेल्यासही त्याचे विश्लेषण करून देण्यात येते. परंतु पद्धत क्रमांक दोन आणि तीनमध्ये या संस्थेतील व्यक्तींना प्रत्यक्ष माहिती संगणकात भरावी लागत असल्यामुळे त्याच्या विश्लेषणासाठी जास्त कालावधी लागेल.

संशोधनातून मिळालेल्या संख्यात्मक आधारसामग्रीचे विश्लेषण स्वत: किंवा संगणकाच्या साहाय्याने करण्यापूर्वी तुम्हांला काही घटकांबाबत निर्णय घ्यावे लागतील. हे घटक पुढीलप्रमाणे -

(१) तुम्ही संशोधनासाठी कोणत्या प्रायोगिक अभिकल्पांचा वापर केलेला आहे.

(२) संशोधन प्रश्न / उद्दिष्टे / परिकल्पना यावरून तुम्ही कोणकोणत्या चलांचे मापन केलेले आहे.

(३) प्रत्येक चल हे कोणत्या श्रेणीतील आहे हे निश्चित केले आहे का ?

उदाहरणार्थ -

नामांकन श्रेणीतील चले

देश	- विकसित / अविकसित / विकसनशील
आर्थिक परिस्थिती	- गरीब / श्रीमंत
लिंग	- स्त्री / पुरुष
बुद्धिमत्ता	- हुशार / मठ्ठ
राहण्याचे ठिकाण	- शहरी / ग्रामीण
धर्म	- हिंदू / मुस्लिम
राजकीय	- डावे / उजवे

क्रमांकन श्रेणीतील चले

सौंदर्य स्पर्धा - गुण देणे (चित्रकला, निबंधस्पर्धा टक्केवारीवरून क्रमांक / व्याख्यान स्पर्धा)

- उंचीनुसार, वजनानुसार वर्गीकरण
- ऑलंपिकमध्ये मिळालेला - क्रमांक (Rank आधारे दिलेले असतात.

अंतर श्रेणीतील चले

- उत्पन्न, घरातील अन्नातून मिळणाऱ्या कॅलरी
- विद्यार्थ्यांना चाचणीत मिळालेले गुण.
- अभिवृत्ती बुद्धिमत्ता.

गुणोत्तर श्रेणीतील चले

- लोकसंख्येची घनता

★ **तुमच्या संशोधनातील या विविध चलांपैकी स्वाश्रयी चल कोणते आणि आश्रयी कोणते ? नियंत्रित चल कोणते ? मध्यस्थ चल म्हणून कार्य करणारे चल कोणते आहे हे निश्चित केले आहे का ?**

★ **तुमच्या आधारसामुग्रीच्या / माहितीच्या विश्लेषणासाठी कोणते सांख्यिकी तंत्र वापरावयाचे हे तुम्ही निश्चित केले आहे का ?**

या सर्व प्रश्नांचा निर्णय तुम्हांला स्वत:ला घ्यावा लागेल. त्यानंतरच तुम्ही स्वत: किंवा इतरांच्या मदतीच्या साहाय्याने आधारसामग्रीचे विश्लेषण करून अचूक निष्कर्ष काढू शकाल.

सरावासाठी स्वाध्याय

तुमच्या संशोधनातील विविध श्रेणीतील चलांची यादी तयार करा आणि त्या प्रत्येक चलासाठी कोणते सांख्यिकी तंत्र वापराल ते लिहा.

९.० सारांश

संशोधनामध्ये मूलभूत सांख्यिकीवरून अचूक निष्कर्ष काढता येत नाहीत. त्यासाठी प्रगत सांख्यिकीचाच वापर करावा लागतो. ही प्रगत सांख्यिकी वापरण्यापूर्वी प्रथम स्वाधीनता मात्रा, विश्वासांतर, शून्य परिकल्पना, दिशांकित परिकल्पना, सार्थकता स्तर ह्या संकल्पनेची माहिती असणे अत्यावश्यक ठरते. प्रसामान्य संभव वक्राच्या साहाय्याने भाकित करणे, संभवनीयता, गुणवत्तेनुसार गटविभागणी, विविध न्यादर्शाच्या संदर्भात सांख्यिकीची वैधता आणि विश्वसनीयता ठरविता येते. सांख्यिकीय विश्लेषणासाठी परिमितीय आणि अपरिमितीय चाचण्यांचा प्रामुख्याने वापर केला जातो. संशोधकाचे मापन साधन निश्चित असेल. आधारसामग्री संख्यात्मक यथार्थ आणि वस्तुनिष्ठ स्वरूपाची आणि अंतर किंवा गुणोत्तर शलाकेतील असेल, तर परिमितीय चाचण्यांचा वापर केला जातो. या चाचण्यांसाठी संशोधनामध्ये दोन गटांचा वापर केलेला असेल तर क्रांतिक गुणोत्तर, टी-चाचणीचा वापर केला जातो. प्रायोगिक संशोधनासाठी दोन समतुल्य गट निवडणे अनेक वेळा अशक्य असते. त्यावेळी मध्यमान आणि प्रमाण विचलनाच्या साहाय्याने दोन गट समतुल्य केले जातात. ज्यावेळी मध्यमानात पडणारा फरक हा कमी किंवा जास्त असतो त्यावेळी द्विपुच्छ चाचणीचा वापर केला जातो. परंतु कधी कधी मध्यमानातील फरक हा निश्चितपणे अधिकच किंवा कमी असा कोणत्याही एकाच दिशेने असतो त्यावेळी एकपुच्छ चाचणीचा वापर केला जातो. अनेक न्यादर्शांच्या मध्यमानाची तुलना करण्यासाठी प्रसरण विश्लेषण तंत्राचा वापर केला जातो. यात एक आश्रयी चल असेल तर एकमार्गी प्रसरण विश्लेषण, दोन आश्रयी चले असतील तर द्विमार्गी प्रसरण विश्लेषण आणि तीन किंवा त्यापेक्षा जास्त आश्रयी चले असतील तर बहुचल प्रसरण विश्लेषणाचा वापर केला जातो. ज्यावेळी न्यादर्शाचा आकार लहान असतो, संशोधनासाठी जसा मिळेल तसा न्यादर्श वापरला जातो. या न्यादर्शाचे लोकसंख्येतील वितरण प्रसामान्य असण्याबाबत संशोधक साशंक असतो, आधारसामग्री गुणांकाऐवजी क्रमांकन श्रेणीमध्ये असते त्यावेळी अपरिमितीय चाचण्यांचा वापर केला जातो. प्रमाणकांची दिशा निश्चित करण्यासाठी चिन्ह चाचणीचा वापर केला जातो. ज्यावेळी संशोधनातील दोन गट वेगवेगळे असतात तेव्हा त्यांच्या प्रावीण्याची तुलना करण्यासाठी मध्यांक चाचणी वापरली जाते. आधारसामग्रीच्या आधारे शून्य परिकल्पना, दिशांकित परिकल्पनेचा पडताळा पाहण्यासाठी χ^2 (काय स्क्वेअर) चाचणीचा वापर केला जातो. ज्यावेळेला संशोधकाला नमुन्याबाबत प्रसामान्य संभव वितरणाची खात्री नसते त्यावेळेला संशोधकाला संभाव्यता परिकल्पना मांडावी लागते. परिमितीय चाचणीतील टी - चाचणीला पर्याय म्हणून अपरिमितीय आधारसामग्रीसाठी विलकॉक्सन मॅनव्हिटने चाचणी मोठ्या प्रमाणात वापरली जाते.

१०.० पारिभाषिक शब्द

विश्वासांतर	-Confidence Interval
सार्थकता स्तर	-Level of Significance
स्वाधीनता मात्रा	-Degree of Freedom
शून्य परिकल्पना / अभ्युपगम	-Null Hypothesis
न्यादर्श	-Sample
प्रचलन विश्लेषण	-Analysis of Variance
काय - स्क्वेअर	-Chi-square
सहसंबंध	-Correlation
भाकित, पूर्वकथन	-Prediction
सप्रमाणता, वैधता	-Validity
विकिरण चित्र	-Scattergram, Scatter Diagram
सहप्रलचन विश्लेषण	-Analysis of Covariance
प्रमाणत्रुटी	-Standard Errors
वृद्धिगुणांक विश्लेषण	-Analysis of Gain Score
गुणात्मक संशोधन	-Qualitative Research
संख्यात्मक संशोधन	-Quantitative Research
आधारसामुग्री	-Data
आधारसामुग्री संकलन	-Collection of Data
संख्यात्मक माहिती	-Quantitative Information
गुणात्मक माहिती	-Qualitative Information
नामांकन श्रेणी	-Nominal Scale
क्रमांकन श्रेणी	-Ordinal Scale
अंतर श्रेणी	-Interval Scale
गुणोत्तर श्रेणी	-Ratio Scale
प्रमाणनित्यके	-Parameter
परिमितीय चाचण्या	-Parametric tests
अपरिमितीय चाचण्या	-Non-Parametric tests
संपादणूक / उपलब्धी	-Achievement
अभिवृत्ती / दृष्टिकोन / मनोवृत्ती	-Attitude
अभिरूची	-Interest
केंद्रीय प्रवृत्ती	-Central Tendency

विचलन	- Variability
चल	- Variable
स्थिरांक	- Constant
घटकात्मक अभिकल्प	- Factorial Design
योगायोग	- Chance
स्वाश्रयी चल	- Independent Variable
आश्रयी चल	- Dependent Variable
मध्यस्थ चल	- Intermediate Variable
प्रमाण विचलन	- Standard Deviation
संभवनीयता	- Probability
प्रसामान्य	- Normal
प्रसामान्य संभव वक्र	- Normal Probability Curve
अंदाज त्रुटी	- Error of estimate
परागमन	- Regression
प्रायोगिक अभिकल्प	- Experimental Design
श्रेणी क्रम / श्रेणी अंतर पद्धती	- Rank Rule / Rank Difference Method

११.० अधिक वाचनासाठी पुस्तके

(१) Broota, K. D., (1989), *'Experimental Design in Behavioural Research'*, New Delhi, Wiley Eastern Limited.

(२) Garrett, H. E. and Wood - Worth, R. S., (1981), *'Statistics in Psychology and Education'*, Bombay Vakils Feffter and Simons Pvt. Ltd.

(३) Guilford J. P., (1965), *'Fundamental Statistics in Psychology and Education'*, 4th edn., New York, McGraw Hill book Co.

(४) Wiersma, W., (1991), *'Research Methods in Education'*, Boston Allyn and Bacon.

(५) उपासनी, ना. के., कुलकर्णी, के. वि., (१९८७), *'नवे शैक्षणिक मूल्यमापन आणि संख्याशास्त्र'*, पुणे, श्रीविद्या प्रकाशन.

(६) कदम, चा. प., (१९८९), *'शैक्षणिक संख्याशास्त्र'*, पुणे, नूतन प्रकाशन.

(७) पाटील, गी. ग., (१९९८), *'शैक्षणिक संख्याशास्त्र'*, नागपूर, श्री मंगेश प्रकाशन.

(८) पंडित बन्सीबिहारी (१९९४), *'शैक्षणिक संशोधनासाठी प्रायोगिक अभिकल्प'*, पुणे, नूतन प्रकाशन.

(९) मस्के तानाजी आत्माराम (१९९०), *'शैक्षणिक संख्याशास्त्र'*, संगमनेर, मस्के प्रकाशन.

मूलभूत सांख्यिकी

परिशिष्ट - १

पिअरसन (r) चे फिशरच्या सहसंबंध गुणकात रूपांतर

Conversion of a Pearson r into
a corresponding Fisher's % coefficient *

r	s	r	s	r	s	r	s	r	s	r	s
.25	.26	.40	.42	.55	.62	.70	.87	.85	1.26	.950	1.83
.26	.27	.41	.44	.56	.63	.71	.89	.86	1.29	.955	1.89
.27	.28	.42	.45	.57	.65	.72	.91	.87	1.33	.960	1.95
.28	.29	.43	.46	.58	.66	.73	.93	.88	1.38	.965	2.01
.29	.30	.44	.47	.59	.68	.74	.95	.89	1.42	.970	2.09
.30	.31	.45	.48	.60	.69	.75	.97	.90	1.47	.975	2.18
.31	.32	.46	.50	.61	.71	.76	1.00	.905	1.50	.980	2.30
.32	.33	.47	.51	.62	.73	.77	1.02	.910	1.53	.985	2.44
.33	.34	.48	.52	.63	.74	.78	1.05	.915	1.56	.990	2.65
.34	.35	.49	.54	.64	.76	.79	1.07	.920	1.59	.995	2.99
.35	.37	.50	.55	.65	.78	.80	1.10	.925	1.62		
.36	.38	.51	.56	.66	.79	.81	1.13	.930	1.66		
.37	.39	.52	.58	.67	.81	.82	1.16	.935	1.70		
.38	.40	.53	.59	.68	.83	.83	1.19	.940	1.74		
.39	.41	.54	.60	.69	.85	.84	1.22	.945	1.78		

* r's under .25 may be taken as equivalent to z's.

प्रगत सांख्यिकी

परिशिष्ट - १

टी चाचणी मूल्य

Critical Values of Student's Distribution (t)

df	*Two-tailed test level of significance*		*One-tailed test level of significance*	
	.05	*.01*	*.05*	*.01*
01	12.706	63.557	6.314	31.821
02	4.303	9.925	2.920	6.965
03	3.182	5.841	2.353	4.541
04	2.776	4.604	2.132	3.747
05	2.571	4.032	2.015	3.365
06	2.447	3.707	1.943	3.143
07	2.365	3.499	1.895	2.998
08	2.306	3.355	1.860	2.896
09	2.262	3.250	1.833	2.821
10	2.228	3.169	1.812	2.764
11	2.201	3.106	1.796	2.718
12	2.179	3.055	1.782	2.681
13	2.160	3.012	1.771	2.650
14	2.145	2.977	1.761	2.624
15	2.131	2.947	1.753	2.602

df	*Two-tailed test level of significance*		*One-tailed test level of significance*	
	.05	*.01*	*.05*	*.01*
16	2.120	2.921	1.746	2.583
17	2.110	2.898	1.740	2.567
18	2.101	2.878	1.734	2.552
19	2.093	2.861	1.729	2.539
20	2.086	2.845	1.725	2.528
21	2.080	2.831	1.721	2.518
22	2.074	2.819	1.717	2.508
23	2.069	2.807	1.714	2.500
24	2.064	2.797	1.711	2.492
25	2.060	2.787	1.708	2.485
26	2.056	2.779	1.706	2.479
27	2.052	2.771	1.703	2.477
28	2.048	2.763	1.701	2.463
29	2.045	2.756	1.699	2.462
30	2.042	2.750	1.697	2.457
40	2.021	2.704	1.684	2.423
60	2.000	2.660	1.671	2.390
120	1.980	2.617	1.658	2.358
∞	1.960	2.576	1.645	2.326

प्रगत सांख्यिकी

परिशिष्ट - २

प्रसामान्य संभव वक्र क्षेत्रफळ मूल्य

Percentage of Area Lying Between the Mean and Successive Standard Deviation Units Under the Normal Curve

$z\left(\frac{x}{\sigma}\right)$	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
.0	.0000	.0040	.0080	.0120	.0160	.0199	.0239	.0279	.0319	.0359
.1	.0398	.0438	.0478	.0517	.0557	.0596	.0636	.0675	.0714	.0753
.2	.0793	0.832	.0871	.0910	.0948	.0987	.1026	.1064	.1103	.1141
.3	.1179	.1217	.1255	.1293	.1331	.1368	.1406	.1443	.1480	.1517
.4	.1554	.1591	.1628	.1664	.1700	.1736	.1772	.1808	.1844	.1879
.5	.1915	.1950	.1985	.2019	.2054	.2088	.2123	.2157	.2190	.2224
.6	.2257	.2291	.2324	.2357	.2389	.2422	.2454	.2486	.2517	.2549
.7	.2580	.2611	.2642	.2673	.2704	.2734	.2764	.2794	.2823	.2852
.8	.2881	.2910	.2939	.2967	.2995	.3023	.3051	.3078	.3106	.3133
.9	.3159	.3186	.3212	.3238	.3264	.3290	.3315	.3340	.3365	.3389
1.0	.3413	.3438	.3461	.3485	.3508	.3531	.3554	.3577	.3599	.3621
1.1	.3643	.3665	.3686	.3708	.3729	.3749	.3770	.3790	.3810	.3830
1.2	.3849	.3869	.3888	.3907	.3925	.3944	.3962	.3980	.3997	.4015

$z\left(\frac{x}{\sigma}\right)$	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
1.3	.4032	.4049	.4066	.4082	.4099	.4115	.4131	.4147	.4162	.4177
1.4	.4192	.4207	.4222	.4236	.4251	.4265	.4279	.4292	.4306	.4319
1.5	.4332	.4345	.4357	.4370	.4383	.4394	.4406	.4418	.4429	.4441
1.6	.4452	.4463	.4474	.4484	.4495	.4505	.4515	.4525	.4535	.4545
1.7	.4554	.4564	.4573	.4582	.4591	.4599	.4608	.4616	.4625	.4633
1.8	.4641	.4649	.4656	.4664	.4671	.4678	.4686	.4693	.4699	.4706
1.9	.4713	.4719	.4726	.4732	.4738	.4744	.4750	.4756	.4761	.4767
2.0	.4772	.4778	.4783	.4788	.4793	.4798	.4803	.4808	.4812	.4817
2.1	.4821	.4826	.4830	.4834	.4838	.4842	.4846	.4850	.4854	.4857
2.2	.4861	.4864	.4868	.4871	.4875	.4878	.4881	.4884	.4887	.4890
2.3	.4893	.4896	.4898	.4901	.4904	.4906	.4909	.4911	.4913	.4916
2.4	.4918	.4920	.4922	.4925	.4927	.4929	.4931	.4932	.4934	.4936
2.5	.4938	.4940	.4941	.4943	.4945	.4946	.4948	.4949	.4951	.4952
2.6	.4953	.4955	.4956	.4957	.4959	.4960	.4961	.4962	.4963	.4964
2.7	.4965	.4966	.4967	.4968	.4969	.4970	.4971	.4972	.4973	.4974
2.8	.4974	.4975	.4976	.4977	.4977	4978	.4979	.4979	.4980	.4981
2.9	.4981	.4982	.4982	.4983	4984	4984	.4985	.4985	.4986	.4986
3.0	.4987									

प्रगत सांख्यिकी

परिशिष्ट - ३

एकमार्गी प्रसरण विश्लेषण मूल्य

Critical Balues of the F Distribution

DF FOR DE NOMI-NATOR	X	DF FOR NUMERATOR											
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
01	.10	39.9	49.5	53.6	55.8	57.2	58.2	58.9	59.4	59.9	60.2	60.5	60.7
	.05	161	200	216	225	230	234	237	239	241	242	243	244
02	.10	8.53	9.00	9.16	9.24	9.29	9.33	9.35	9.37	9.38	9.39	9.40	9.41
	.05	18.5	19.0	19.2	19.2	19.3	19.3	19.4	19.4	19.4	19.4	19.4	19.4
	.01	98.5	99.0	99.2	99.2	99.3	99.3	99.4	99.4	99.4	99.4	99.4	99.4
03	.10	5.54	5.46	5.39	5.34	5.31	5.28	5.27	5.25	5.24	5.23	5.22	5.22
	.05	10.1	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.89	8.85	8.81	8.79	8.76	8.74
	.01	34.1	30.3	29.5	28.7	28.2	27.9	27.7	27.5	27.3	27.2	27.1	27.1
04	.10	4.54	4.32	4.19	4.11	4.05	4.01	3.98	3.95	3.94	3.92	3.91	3.90
	.05	7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04	6.00	5.96	5.94	5.91
	.01	21.2	18.0	16.7	16.0	15.5	15.2	15.0	14.8	14.7	14.5	14.4	14.4

DF FOR DE NOMI-NATOR	X	DF FOR NUMERATOR 1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
05	.10	4.06	3.78	3.62	3.52	3.45	3.40	3.37	3.34	3.32	3.30	3.28	3.27
	.05	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.77	4.74	4.71	4.68
	.01	16.3	13.3	12.1	11.4	11.0	10.7	10.5	10.3	10.2	10.1	9.96	9.89
06	.10	3.78	3.46	3.29	3.18	3.11	3.05	3.01	2.98	2.96	2.94	2.92	2.90
	.05	5.99	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15	4.10	4.06	4.03	4.00
	.01	13.7	10.9	9.78	9.15	8.75	8.47	8.26	8.10	7.98	7.87	7.79	7.72
07	.10	3.59	3.26	3.07	2.96	2.88	2.83	2.78	2.75	2.72	2.70	2.68	2.67
	.05	5.59	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73	3.68	3.64	3.60	3.57
	.01	12.2	9.55	8.45	7.85	7.46	7.19	6.99	6.84	6.72	6.62	6.54	6.47
08	.10	3.46	3.11	2.92	2.81	2.73	2.67	2.62	2.59	2.56	2.54	2.52	2.50
	.05	5.32	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.50	3:44	3.39	3.35	3.31	3.28
	.01	11.3	8.65	7.59	7.01	6.63	6.37	6.18	6.03	5.91	5.81	5.73	5.67
09	.10	3.36	3.01	2.81	2.69	2.61	2.55	2.51	2.47	2.44	2.42	2.40	2.38
	.05	5.12	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.29	3.23	3.18	3.14	3.10	3.07
	.01	10.6	8.02	6.99	.42	6.06	5.80	5.61	5.47	5.35	5.26	5.18	5.11

DF FOR DE NOMI-NATOR	X	DF FOR NUMERATOR 1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
10	.10	3.29	2.92	2.73	2.61	2.52	2.46	2.41	2.38	2.35	2.32	2.30	2.28
	.05	4.96	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07	3.02	2.98	2.94	2.91
	.01	10.0	7.56	6.55	5.99	5.64	5.39	5.20	5.06	4.94	4.85	4.77	4.71
11	.10	3.23	2.86	2.66	2.54	2.45	2.39	2.34	2.30	2.27	2.25	2.23	2.21
	.05	4.84	3.98	3.59	3.36	3.20	3.09	3.01	2.95	2.90	2.85	2.82	2.79
	.01	9.65	7.21	6.22	5.67	5.32	5.07	4.89	4.74	4.63	4.54	4.46	4.40
12	.10	3.18	2.81	2.61	2.48	2.39	2.33	2.28	2.24	2.21	2.19	2.17	2.15
	.05	4.75	3.89	3.49	3.26	3.11	3.00	2.91	2.85	2.80	2.75	2.72	2.69
	.01	9.33	6.93	5.95	5.41	5.06	4.82	4.64	4.50	4.39	4.30	4.22	4.16
13	.10	3.14	2.76	2.56	2.43	2.35	2.28	2.23	2.20	2.16	2.14	2.12	2.10
	.05	4.67	3.81	3.41	3.18	3.03	2.92	2.83	2.77	2.71	2.67	2.63	2.60
	.01	9.07	6.70	5.74	5.21	4.86	4.62	4.44	4.30	4.19	4.10	4.02	3.96
14	.10	3.10	2.73	2.52	2.39	2.31	2.24	2.19	2.15	2.12	2.10	2.08	2.05
	.05	4.60	3.74	3.34	3.11	2.96	2.85	2.76	2.70	2.65	2.60	2.57	2.53
	.01	8.86	6.51	5.56	5.04	4.69	4.46	4.28	4.14	4.03	3.94	3.86	3.80

DF FOR DE NOMI-NATOR	X	DF FOR NUMERATOR											
		1	2	3	4	5	6.	7	8	9	10	11	12
15	.10	3.07	2.70	2.49	2.36	2.27	2.21	2.16	2.12	2.09	2.06	2.04	2.02
	.05	4.54	3.68	3.29	3.06	2.90	2.79	2.71	2.64	2.59	2.54	2.51	2.48
	.01	8.68	6.36	5.42	4.89	4.56	4.32	4.14	4.00	3.89	3.80	3.73	3.67
16	.10	3.05	2.67	2.46	2.33	2.24	2.18	2.13	2.09	2.06	2.03	2.01	1.99
	.05	4.49	3.63	3.24	3.01	2.85	2.74	2.66	2.59	2.54	2.49	2.46	2.42
	.01	8.53	6.23	5.29	4.77	4.44	4.20	4.03	3.89	3.78	3.69	3.62	3.55
17	.10	3.03	2.64	2.44	2.31	2.22	2.15	2.10	2.06	2.03	2.00	1.98	1.96
	.05	4.45	3.59	3.20	2.96	2.81	2.70	2.61	2.55	2.49	2.45	2.41	2.38
	.01	8.40	6.11	5.18	4.67	4.34	4.10	3.93	3.79	3.68	3.59	3.52	3.46
18	.10	3.01	2.62	2.42	2.29	2.20	2.13	2.08	2.04	2.00	1.98	1.96	1.93
	.05	4.41	3.55	3.16	2.93	2.77	2.66	2.58	2.51	2.46	2.41	2.37	2.34
	.01	8.29	6.01	5.09	4.58	4.25	4.01	3.84	3.71	3.60	3.51	3.43	3.37
19	.10	2.99	2.61	2.40	2.27	2.18	2.11	2.06	2.02	1.98	1.96	1.94	1.91
	.05	4.38	3.52	3.13	2.90	2.74	2.63	2.54	2.48	2.42	2.38	2.34	2.31
	.01	8.18	5.93	5.01	4.50	4.17	3.94	3.77	3.63	3.52	3.43	3.36	3.30

DF FOR DE NOMINATOR	X	DF FOR NUMERATOR 1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
20	.10	2.97	2.59	2.38	2.25	2.16	2.09	2.04	2.00	1.96	1.94	1.92	1.89
	.05	4.35	3.49	3.10	2.87	2.71	2.60	2.51	2.45	2.39	2.35	2.31	2.28
	.01	8.10	5.85	4.94	4.43	4.10	3.87	3.70	3.56	3.46	3.37	3.29	3.23
22	.10	2.95	2.56	2.35	2.22	2.13	2.06	2.01	1.97	1.93	1.90	1.88	1.86
	.05	4.30	3.44	3.05	2.82	2.66	2.55	2.46	2.40	2.34	2.30	2.26	2.23
	.01	7.95	5.72	4.82	4.31	3.99	3.76	3.59	3.45	3.35	3.26	3.18	3.12
24	.10	2.93	2.54	2.33	2.19	2.10	2.04	1.98	1.94	1.91	1.88	1.85	1.83
	.05	4.26	3.40	3.01	2.78	2.62	2.51	2.42	2.36	2.30	2.25	2.21	2.18
	.01	7.82	5.61	4.72	4.22	3.90	3.67	3.50	3.36	3.26	3.17	3.09	3.03
26	.10	2.91	2.52	2.31	2.17	2.08	2.01	1.96	1.92	1.88	1.86	1.84	1.81
	.05	4.23	3.37	2.98	2.74	2.59	2.47	2.39	2.32	2.27	2.22	2.18	2.15
	.01	7.72	5.53	4.64	4.14	3.82	3.59	3.42	3.29	3.18	3.09	3.02	2.96
28	.10	2.89	2.50	2.29	2.16	2.06	2.00	1.94	1.90	1.87	1.84	1.81	1.79
	.05	4.20	3.34	2.95	2.71	2.56	2.45	2.36	2.29	2.24	2.19	2.15	2.12
	.01	7.64	5.45	4.57	4.07	3.75	3.53	3.36	3.23	3.12	3.03	2.96	2.90
30	.10	2.88	2.49	2.28	2.14	2.05	1.98	1.93	1.88	1.85	1.82	1.79	1.77
	.05	4.17	3.32	2.92	2.69	2.53	2.42	2.33	2.27	2.21	2.16	2.13	2.09
	.01	7.56	5.39	4.51	4.02	3.70	3.47	3.30	3.17	3.07	2.98	2.91	2.84

DF FOR DE NOMI-NATOR	X	DF FOR NUMERATOR 1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
40	.10	2.84	2.44	2.23	2.09	2.00	1.93	1.87	1.83	1.79	1.76	1.73	1.71
	.05	4.08	3.23	2.84	2.61	2.45	2.34	2.25	2.18	2.12	2.08	2.04	2.00
	.01	7.31	5.18	4.31	3.83	3.51	3.29	3.12	2.99	2.89	2.80	2.73	2.66
60	.10	2.79	2.39	2.18	2.04	1.95	1.87	1.82	1.77	1.74	1.71	1.68	1.66
	.05	4.00	3.15	2.76	2.53	2.37	2.25	2.17	2.10	2.04	1.99	1.95	1.92
	.01	7.08	4.98	4.13	3.65	3.34	3.12	2.95	2.82	2.72	2.63	2.56	2.50
120	.10	2.75	2.35	2.13	1.99	1.90	1.82	1.77	1.72	1.68	1.65	1.62	1.60
	.05	3.92	3.07	2.68	2.45	2.29	2.17	2.09	2.02	1.96	1.91	1.87	1.83
	.01	6.85	4.79	3.95	3.48	3.17	2.96	2.79	2.66	2.56	2.47	2.40	2.34
200	.10	2.73	2.33	2.11	1.97	1.88	1.80	1.75	1.70	1.66	1.63	1.60	1.57
	.05	3.89	3.04	2.65	2.42	2.26	2.14	2.06	1.98	1.93	1.88	1.84	1.80
	.01	6.76	4.71	3.88	3.41	3.11	2.89	2.73	2.60	2.50	2.41	2.34	2.27
∞	.10	2.71	2.30	2.08	1.94	1.85	1.77	1.72	1.67	1.63	1.60	1.57	1.55
	.05	3.84	3.00	2.60	2.37	2.21	2.10	2.01	1.94	1.88	1.83	1.79	1.75
	.01	6.63	4.61	3.78	3.32	3.02	2.80	2.64	2.51	2.41	2.32	2.25	2.18

DF FOR DE NOMI-NATOR	X	DF FOR NUMERATOR 15	20	24	30	40	50	60	100	120	200	500	∞
17	.10	1.91	1.86	1.84	1.81	1.78	1.76	1.75	1.73	1.72	1.71	1.69	1.69
	.05	2.31	2.23	2.19	2.15	2.10	2.08	2.06	2.02	2.01	1.99	1.97	1.96
	.01	3.31	3.16	3.08	3.00	2.92	2.87	2.83	2.76	2.75	2.71	2.68	2.65
18	.10	1.89	1.84	1.81	1.78	1.75	1.74	1.72	1.70	1.69	1.68	1.67	1.66
	.05	2.27	2.19	2.15	2.11	2.06	2.04	2.02	1.98	1.97	1.95	1.93	1.92
	.01	3.23	3.08	3.00	2.92	2.84	2.78	2.75	2.68	2.66	2.62	2.59	2.57
19	.10	1.86	1.81	1.79	1.76	1.73	1.71	1.70	1.67	1.67	1.65	1.64	1.63
	.05	2.23	2.16	2.11	2.07	2.03	2.00	1.98	1.94	1.93	1.91	1.89	1.88
	.01	3.15	3.00	2.92	2.84	2.76	2.71	2.67	2.60	2.58	2.55	2.51	2.49
20	.10	1.84	1.79	1.77	1.74	1.71	1.69	1.68	1.65	1.64	1.63	1.62	1.61
	.05	2.20	2.12	2.08	2.04	1.99	1.97	1.95	1.91	1.90	1.88	1.86	1.84
	.01	3.09	2.94	2.86	2.78	2.69	2.64	2.61	2.54	2.52	2.48	2.44	2.42
22	.10	1.81	1.76	1.73	1.70	1.67	1.65	1.64	1.61	1.60	1.59	1.58	1.57
	.05	2.15	2.07	2.03	1.98	1.94	1.91	1.89	1.85	1.84	1.82	1.80	1.78
	.01	2.98	2.83	2.75	2.67	2.58	2.53	2.50	2.42	2.40	2.36	2.33	2.31

DF FOR DE NOMI-NATOR	X	DF FOR NUMERATOR 15	20	24	30	40	50	60	100	120	200	500	∞
24	.10	1.78	1.73	1.70	1.67	1.64	1.62	1.61	1.58	1.57	1.56	1.54	1.53
	.05	2.11	2.03	1.98	1.94	1.89	1.86	1.84	1.80	1.79	1.77	1.75	1.73
	.01	2.89	2.74	2.66	2.58	2.49	2.44	2.40	2.33	2.31	2.27	2.24	2.21
26	.10	1.76	1.71	1.68	1.65	1.61	1.59	1.58	1.55	1.54	1.53	1.51	1.50
	.05	2.07	1.99	1.95	1.90	1.85	1.82	1.80	1.76	1.75	1.73	1.71	1.69
	.01	2.81	2.66	2.58	2.50	2.42	2.36	2.33	2.25	2.23	2.19	2.16	2.13
28	.10	1.74	1.69	1.66	1.63	1.59	1.57	1.56	1.53	1.52	1.50	1.49	1.48
	.05	2.04	1.96	1.91	1.87	1.82	1.79	1.77	1.73	1.71	1.69	1.67	1.65
	.01	2.75	2.60	2.52	2.44	2.35	2.30	2.26	2.19	2.17	2.13	2.09	2.06
30	.10	1.72	1.67	1.64	1.61	1.57	1.55	1.54	1.51	1.50	1.48	1.47	1.46
	.05	2.01	1.93	1.89	1.84	1.79	1.76	1.74	1.70	1.68	1.66	1.64	1.62
	.01	2.70	2.55	2.47	2.39	2.30	2.25	2.21	2.13	2.11	2.07	2.03	2.01
40	.10	1.66	1.61	1.57	1.54	1.51	1.48	1.47	1.43	1.42	1.41	1.39	1.38
	.05	1.92	1.84	1.79	1.74	1.69	1.66	1.64	1.59	1.58	1.55	1.53	1.51
	.01	2.52	2.37	2.29	2.20	2.11	2.06	2.02	1.94	1.92	1.87	1.83	1.80

DF FOR DENOMINATOR	X	DF FOR NUMERATOR 15	20	24	30	40	50	60	100	120	200	500	∞
60	.10	1.60	1.54	1.51	1.48	1.44	1.41	1.40	1.36	1.35	1.33	1.31	1.29
	.05	1.84	1.75	1.70	1.65	1.59	1.56	1.53	1.48	1.47	1.44	1.41	1.39
	.01	2.35	2.20	2.12	2.03	1.94	1.88	1.84	1.75	1.73	1.68	1.63	1.60
120	.10	1.55	1.48	1.45	1.41	1.37	1.34	1.32	1.27	1.26	1.24	1.21	1.19
	05	1.75	1.66	1.61	1.55	1.50	1.46	1.43	1.37	1.35	1.32	1.28	1.25
	.01	2.19	2.03	1.95	1.86	1.76	1.70	1.66	1.56	1.53	1.48	1.42	1.38
200	.10	1.52	1.46	1.42	1.38	1.34	1.31	1.28	1.24	1.22	1.20	1.17	1.14
	.05	1.72	1.62	1.57	1.52	1.46	1.41	1.39	1.32	1.29	1.26	1.22	1.19
	.01	2.13	1.97	1.89	1.79	1.69	1.63	1.58	1.48	1.44	1.39	1.33	1.28
	.10	1.49	1.42	1.38	1.34	1.30	1.26	1.24	1.18	1.17	1.13	1.08	1.00
	.05	1.67	1.57	1.52	1.46	1.39	1.35	1.32	1.24	1.22	1.17	1.11	1.00
	.01	2..04	1.88	1.79	1.70	1.59	1.52	1.47	1.36	1.32	1.25	1.15	1.00

प्रगत सांख्यिकी

परिशिष्ट - ४

कायस्क्वेअर चाचणी - मूल्य

Abridged Table of Critical Values for Chi Square

df	*0.95*	*0.90*	*0.80*	*0.70*	*0.50*	*0.30*	*0.20*	*0.10*	*0.05*	*0.02*	*0.01*
01	0.00393	0.0158	0.0642	0.148	0.455	1.074	1.642	2.706	3.841	5.412	6.635
02	0.103	0.211	0.446	0.713	1.386	2.408	3.219	4.605	5.991	7.824	9.210
03	0.352	0.584	1.005	1.424	2.366	3.665	4.642	6.251	7.815	9.837	11.345
04	0.711	1.064	1.649	2.195	3.357	4.878	5.989	7.779	9.488	11.668	13.277
05	1.145	1.610	2.343	3.000	4.351	6.064	7.289	9.236	11.070	13.388	15.088
06	1.635	2.204	3.070	3.828	5.348	7.231	8.558	10.645	12.592	15.033	16.812
07	2.167	2.833	3.822	4.671	6.346	8.383	9.803	12.017	14.067	16.622	18.475
08	2.733	3.490	4.594	5.527	7.344	9.524	11.030	13.362	15.507	18.168	20.090
09	3.325	4.168	5.380	6.393	8.343	10.656	12.242	14.684	16.919	19.679	21.666
10	3.940	4.865	6.179	7.267	9.342	11.781	13.442	15.987	18.307	21.161	23.209
11	4.575	5.578	6.989	8.148	10.341	12.899	14.631	17.275	19.675	22.618	24.725
12	5.226	6.304	7.807	9.034	11.340	14.011	15.812	18.549	21.026	24.054	26.217
13	5.892	7.042	8.634	9.926	12.340	15.119	16.985	19.812	22.362	25.472	27.688
14	6.571	7.790	9.467	10.821	13.339	16.222	18.151	21.064	23.635	26.873	29.141
15	7.261	8.547	10.307	11.721	14.339	17.322	19.311	22.307	24.996	28.259	30.578

df	0.95	0.90	0.80	0.70	0.50	0.30	0.20	0.10	0.05	0.02	0.01
16	7.962	9.312	11.152	12.624	15.338	18.418	20.465	23.542	26.296	29.683	32.000
17	8.672	10.085	12.002	13.531	16.338	19.511	21.615	24.769	27.587	30.995	33.409
18	9.390	10.865	12.857	14.440	17.338	20.601	22.760	25.989	28.869	32.346	34.805
19	10.117	11.651	13.716	15.352	18.338	21.689	23.900	27.204	30.144	33.687	36.191
20	10.851	12.443	14.578	16.266	19.337	22.775	25.038	28.412	31.410	35.020	37.566
21	11.591	13.240	15.445	17.182	20.337	23.858	26.171	29.615	32.671	36.343	38.932
22	12.338	14.041	16.314	18.101	21.337	24.939	27.301	30.813	33.924	37.659	40.289
23	13.091	14.848	17.187	19.021	22.337	26.018	28.429	32.007	35.172	38.968	41.638
24	13.848	15.659	18.062	19.943	23.337	27.096	29.553	33.196	36.415	40.270	42.980
25	14.611	16.473	18.940	20.867	24.337	28.172	30.675	34.382	37.652	41.566	44.314
26	15.379	17.292	19.820	21.792	25.336	29.246	31.795	35.563	38.885	42.856	45.642
27	16.151	18.114	20.703	22.719	26.336	30.319	32.912	36.741	40.113	44.140	46.963
28	16.928	18.939	21.588	23.647	27.336	31.391	34.027	37.916	41.337	45.419	48.278
29	17.708	19.768	22.475	24.577	28.336	32.461	35.139	39.087	42.517	46.693	49.588
30	18.493	20.599	23.364	25.508	29.336	33.530	36.250	40.256	43.773	47.962	50.892

प्रगत सांख्यिकी

परिशिष्ट - ५

विलकॉक्सन - मॅनव्हिटने चाचणी - मूल्य

Lower and upper-tail probabilities for W_X, the Wilcoxon-Mann-Whitney rank-sum statistic*

Entries are P $[W_X \le c_u]$ and P $[w_X \ge c_u]$. w_X is the rank-sum for the smaller group

m = 3																									
c_l	$n=3$	c_u	$n=4$	c_u	$n=5$	c_u	$n=6$	c_u	$n=7$	c_u	$n=8$	c_u	$n=9$	c_u	$n=10$	c_u	$n=11$	c_u	$n=12$	c_u
6	.0500	15	0.286	18	.0179	21	0119	24	.0083	27	.0061	30	.0045	33	.0035	36	.0027	39	.0022	42
7	.1000	14	.0571	17	.0357	20	.0238	23	.0167	26	0121	29	.0091	32	.0070	35	.0055	38	.0044	41
8	2000	13	1143	16	.0714	19	.0476	22	0333	25	0.242	28	.0182	31	.0140	34	.0110	37	.0088	40
9	.3500	12	.2000	15	.1250	18	.0833	21	.0583	24	.0424	27	.0318	30	.0245	33	.0192	36	.0154	39
10	.5000	11	3143	14	1964	17	.1310	20	0917	23	.0667	26	.0500	29	.0385	32	.0302	35	.0242	38
11	6500	10	4286	13	2857	16	.1905	19	1333	22	.0970	25	.0727	28	.0559	31	.0440	34	.0352	37
12	8000	9	5714	12	.3929	15	2738	18	.1917	21	.1394	24	.1045	27	.0804	30	0632	33	.505	36
13	.9000	8	.6857	11	.5000	14	.3571	17	.2583	20	.1879	23	.1409	26	.1084	29	0852	32	.0681	35
14	9500	7	8000	10	.6071	13	4524	16	3333	19	.2485	22	.1864	25	.1434	28	.1126	31	.0901	34

$m = 3$																				
c_l	$n=3$	c_u	$n=4$	c_u	$n=5$	c_u	$n=6$	c_u	$n=7$	c_u	$n=8$	c_u	$n=9$	c_u	$n=10$	c_u	$n=11$	c_u	$n=12$	c_u
15	1.0000	6	.8857	9	.7143	12	.5476	15	.4167	18	.3152	21	.2409	24	.1853	27	.1456	30	.1165	33
16			.9429	8	.8036	11	.6429	14	.5000	17	.3879	20	.3000	23	.2343	26	.1841	29	.1473	32
17			.9714	7	.8750	10	.7262	13	.5833	16	.4606	19	.3636	22	.2867	25	.2280	28	.1824	31
18			1.0000	6	.9286	9	.8095	12	.6667	15	.5394	18	.4318	21	.3462	24	.2775	27	.2242	30
19					.9643	8	.8690	11	.7417	14	.6121	17	.5000	20	.4056	23	.3297	26	.2681	29
20					.9821	7	.9167	10	.8083	13	.6848	16	.5682	19	.4685	22	.3846	25	.3165	28
21					1.0000	6	.9524	9	.8667	12	.7515	15	.6364	18	.5315	21	.4423	24	.3670	27
22							.9762	8	.9083	11	.8121	14	.7000	17	.5944	20	.5000	23	.4198	26
23							.9881	7	.9417	10	.8606	13	.7591	16	.6538	19	.5577	22	.4725	25
24							1.0000	6	.9667	9	.9030	12	.8136	15	.7133	18	.6154	21	.5275	24

$m = 4$																		
c_l	$n=4$	c_u	$n=5$	c_u	$n=6$	c_u	$n=7$	c_u	$n=8$	c_u	$n=9$	c_u	$n=10$	c_u	$n=11$	c_u	$n=12$	c_u
10	.0143	26	.0079	30	.0048	34	.0030	38	.0020	42	.0014	46	.0010	50	.0007	54	.0005	58
11	.0286	25	.0159	29	.0095	33	.0061	37	.0040	41	.0028	45	.0020	49	.0015	53	.0011	57
12	.0571	24	.0317	28	.0190	32	.0121	36	.0081	40	.0056	44	.0040	48	.0029	52	.0022	56
13	.1000	23	.0556	27	.0333	31	.0212	35	.0141	39	.0098	43	.0070	47	.0051	51	.0038	55
14	.1714	22	.0952	26	.0571	30	.0364	34	.0242	38	.0168	42	.0120	46	.0088	50	.0066	54
15	.2429	21	.1429	25	.0857	29	.0545	33	.0364	37	.0252	41	.0180	45	.0132	49	.0099	53
16	.3429	20	.2063	24	.1286	28	.0818	32	.0545	36	.0378	40	.0270	44	.0198	48	.0148	52
17	.4429	19	.2778	23	.1762	27	.1152	31	.0768	35	.0531	39	.0380	43	.0278	47	.0209	51
18	.5571	18	.3651	22	.2381	26	.1576	30	.1071	34	.0741	38	.0529	42	.0388	46	.0291	50
19	.6571	17	.4524	21	.3048	25	.2061	29	.1414	33	.0993	37	.0709	41	.0520	45	.0390	49
20	.7571	16	.5476	20	.3810	24	.2636	28	.1838	32	.1301	36	.0939	40	.0689	44	.0516	48
21	.8286	15	.6349	19	.4571	23	.3242	27	.2303	31	.1650	35	.1199	39	.0886	43	.0665	47
22	.9000	14	.7222	18	.5429	22	.3939	26	.2848	30	.2070	34	.1518	38	.1128	42	.0852	46
23	.9429	13	.7937	17	.6190	21	.4636	25	.3414	29	.2517	33	.1868	37	.1399	41	.1060	45

$m = 4$																		
cl	$n=4$	c_u	$n=5$	c_u	$n=6$	c_u	$n=7$	c_u	$n=8$	c_u	$n=9$	c_u	$n=10$	c_u	$n=11$	c_u	$n=12$	c_u
24	.9714	12	.8571	16	.6952	20	.5364	24	.4040	28	.3021	32	.2268	36	.1714	40	.1308	44
25	.9857	11	.9048	15	.7619	19	.6061	23	.4667	27	0.3552	31	.2697	35	.2059	39	.1582	43
26	1.0000	10	.9444	14	.8238	18	.6758	22	.5333	26	.4126	30	.3177	34	.2447	38	.1896	42
27			.9683	13	.8714	17	.7364	21	.5960	25	.4699	29	.3666	33	.2857	37	.2231	41
28			.9841	12	.9143	16	.7939	20	.6586	24	.5301	28	.4196	32	.3304	36	.2604	40
29			.9921	11	.9429	15	.8424	19	.7152	23	.5874	27	.4725	31	.3766	35	.2995	39
30			1.0000	10	.9667	14	.8848	18	.7697	22	.6448	26	.5275	30	.4256	34	.3418	38
31					.9810	13	.9182	17	.8162	21	.6979	25	.5804	29	.4747	33	.3852	37
32					.9905	12	.9455	16	.8586	20	.7483	24	.6334	28	.5253	32	.4308	36
33					.9952	11	.9636	15	.8929	19	.7930	23	.6823	27	.5744	31	.4764	35
34					1.0000	10	.9788	14	.9232	18	.8350	22	.7303	26	.6234	30	.5236	34

	$m = 5$											
c_l	$n=5$	c_u	$n=6$	c_u	$n=7$	c_u	$n=8$	c_u	$n=9$	c_u	$n=10$	c_u
15	.0040	40	.0022	45	.0013	50	.0008	55	.0005	60	.0003	65
16	.0079	39	.0043	44	.0025	49	.0016	54	.0010	59	.0007	64
17	.0159	38	.0087	43	.0051	48	.0031	53	.0020	58	.0013	63
18	.0278	37	.0152	42	.0088	47	.0054	52	.0035	57	.0023	62
19	.0476	36	.0260	41	.0152	46	.0093	51	.0060	56	.0040	61
20	.0754	35	.0411	40	.0240	45	.0148	50	.0095	55	.0063	60
21	.1111	34	.0628	39	.0366	44	.0225	49	.0145	54	.0097	59
22	.1548	33	.0887	38	.0530	43	.0326	48	.0210	53	.0140	58
23	.2103	32	.1234	37	.0745	42	.0466	47	.0300	52	.0200	57
24	.2738	31	.1645	36	.1010	41	.0637	46	.0415	51	.0276	56
25	.3452	30	.2143	35	.1388	40	.0855	45	.0559	50	.0376	55
26	.4206	29	.2684	34	.1717	39	.1111	44	.0734	49	.0496	54
27	.5000	28	.3312	33	.2159	38	.1422	43	.0949	48	.0646	53
28	.5794	27	.3961	32	.2652	37	.1772	42	.1199	47	.0823	52

	$m = 5$											
cl	$n=5$	c_u	$n=6$	c_u	$n=7$	c_u	$n=8$	c_u	$n=9$	c_u	$n=10$	c_u
29	.6548	26	.4654	31	.3194	36	.2176	41	.1489	46	.1032	51
30	.7262	25	.5346	30	.3775	35	.2618	40	.1818	45	.1272	50
31	.7897	24	.6039	29	.4381	34	.3108	39	.2188	44	.1548	49
32	.8452	23	.6688	28	.5000	33	.3621	38	.2592	43	.1855	48
33	.8889	22	.7316	27	.5619	32	.4165	37	.3032	42	.2198	47
34	.9246	21	.7857	26	.6225	31	.4716	36	.3497	41	.2567	46
35	.9524	20	.8355	25	.6806	30	5284	35	.3986	40	.2970	45
36	.9722	19	.8766	24	.7348	29	.5835	34	.4491	39	.3393	44
37	.9841	18	.9113	23	.7841	28	.6379	33	.5000	38	.3839	43
38	.9921	17	.9372	22	.8283	27	.6892	32	.5509	37	.4296	42
39	.9960	16	.9589	21	.8662	26	.7382	31	.6014	36	.4765	41
40	1.0000	15	.9740	20	.8990	25	.7824	30	.6503	35	.5235	40

$m = 6$										
c_l	$n=6$	c_u	$n=7$	c_u	$n=8$	c_u	$n=9$	c_u	$n=10$	c_u
21	.0011	57	.0006	63	.0003	69	.0002	75	.0001	81
22	.0022	56	.0012	62	.0007	68	.0004	74	.0002	80
23	.0043	55	.0023	61	.0013	67	.0008	73	.0005	79
24	.0076	54	.0041	60	.0023	66	.0014	72	.0009	78
25	.0130	53	.0070	59	.0040	65	.0024	71	.0015	77
26	.0206	52	.0111	58	.0063	64	.0038	70	.0024	76
27	.0325	51	.0175	57	.0100	63	.0060	69	.0037	75
28	.0465	50	.0256	56	.0147	62	.0088	68	.0055	74
29	.0660	49	.0367	55	.0213	61	.0128	67	.0080	73
30	.0898	48	.0507	54	.0296	60	.0180	66	.0112	72
31	.1201	47	.0683	53	.0406	59	.0248	65	.0156	71
32	.1548	46	.0903	52	.0539	58	.0332	64	.0210	70
33	.1970	45	.1171	51	.0709	57	.0440	63	.0280	69
34	.2424	44	.1474	50	.0906	56	.0567	62	.0363	68
35	.2944	43	.1830	49	.1142	55	.0723	61	.0467	67
36	.3496	42	.2226	48	.1412	54	.0905	60	.0589	66

$m = 6$										
cl	$n=6$	c_u	$n=7$	c_u	$n=8$	c_u	$n=9$	c_u	$n=10$	c_u
37	.4091	41	.2669	47	.1725	53	.1119	59	.0736	65
38	.4686	40	.3141	46	.2068	52	.1361	58	.0903	64
39	.5314	39	.3654	45	.2454	51	.1638	57	.1099	63
40	.5909	38	.4178	44	.2864	50	.1942	56	.1317	62
41	.6504	37	.4726	43	.3310	49	.2280	55	.1566	61
42	.7056	36	.5274	42	.3373	48	.2643	54	.1838	60
43	.7576	35	.5822	41	.4259	47	.3035	53	.2139	59
44	.8030	34	.6346	40	.4749	46	.3445	52	.2461	58
45	.8452	33	.6859	39	.5251	45	.3878	51	.2811	57
46	.8799	32	.7331	38	.5741	44	.4320	50	.3177	56
47	.9102	31	.7774	37	.6227	43	.4773	49	.3564	55
48	.9340	30	.8170	36	.6690	42	.5227	48	.3962	54
49	.9535	29	.8526	35	.7136	41	.5680	47	.4374	53
50	.9675	28	.8829	34	.7546	40	.6122	46	.4789	52
51	.9794	27	.9097	33	.7932	39	.6555	45	.5211	51

$m = 7$								
c_l	$n=7$	c_u	$n=8$	c_u	$n=9$	c_u	$n=10$	c_u
28	.0003	77	.0002	84	.0001	91	.0001	98
29	.0006	76	.0003	83	.0002	90	.0001	97
30	.0012	75	.0006	82	.0003	89	.0002	96
31	.0020	74	.0011	81	.0006	88	.0004	95
32	.0035	73	.0019	80	.0010	87	.0006	94
33	.0055	72	.0030	79	.0017	86	.0010	93
34	.0087	71	.0047	78	.0026	85	.0015	92
35	.0131	70	.0070	77	.0039	84	.0023	91
36	.0189	69	.0103	76	.0058	83	.0034	90
37	.0265	68	.0145	75	.0082	82	.0048	89
38	.0364	67	.0200	74	.0115	81	.0068	88
39	.0487	66	.0270	73	.0156	80	.0093	87
40	.0641	65	.0361	72	.0209	79	.0125	86
41	.0825	64	.0469	71	.0274	78	.0165	85
42	.1043	63	.0603	70	.0356	77	.0215	84
43	.1297	62	.0760	69	.0454	76	.0277	83
44	.1588	61	.0946	68	.0571	75	.0351	82
45	.1914	60	.1159	67	.0708	74	.0439	81

m = 7								
cl	*n=7*	c_u	*n=8*	c_u	*n=9*	c_u	*n=10*	c_u
46	.2279	59	.1405	66	.0869	73	.0544	80
47	.2675	58	.1678	65	.1052	72	.0665	79
48	.3100	57	.1984	64	.1261	71	.0806	78
49	.3552	56	.2317	63	.1496	70	.0966	77
50	.4024	55	.2679	62	.1755	69	.1148	76
51	.4508	54	.3063	61	.2039	68	.1349	75
52	.5000	53	.3472	60	.2349	67	.1574	74
53	.5492	52	.3894	59	.2680	66	.1819	73
54	.5976	51	.4333	58	.3032	65	.2087	72
55	.6448	50	.4775	57	.3403	64	.2374	71
56	.6900	49	.5225	56	.3788	63	.2681	70
57	.7325	48	.5667	55	.4185	62	.3004	69
58	.7721	47	.6106	54	.4591	61	.3345	68
59	.8086	46	.6528	53	.5000	60	.3698	67
60	.8412	45	.6937	52	.5409	59	.4063	66
61	.8703	44	.7321	51	.5815	58	.4434	65
62	.8957	43	.7683	50	.6212	57	.4811	64
63	.9875	42	.8016	49	.6597	56	.5189	63

	m = 8					
cl	*n*=8	c_u	*n*=9	c_u	*n*=10	c_u
36	.0001	100	.0000	108	.0000	116
37	.0002	99	.0001	107	.0000	115
38	.0003	98	.0002	106	.0001	114
39	.0005	97	.0003	105	.0002	113
40	.0009	96	.0005	104	.0003	112
41	.0015	95	.0008	103	.0004	111
42	.0023	94	.0012	102	.0007	110
43	.0035	93	.0019	101	.0010	109
44	.0052	92	.0028	100	.0015	108
45	.0074	91	.0039	99	.0022	107
46	.0103	90	.0056	98	.0031	106
47	.0141	89	.0076	97	.0043	105
48	.0190	88	.0103	96	.0058	104
49	.0249	87	.0137	95	.0078	103
50	.0325	86	.0180	94	.0103	102
51	.0415	85	.0232	93	.0133	101
52	.0524	84	.0296	92	.0171	100
53	.0652	83	.0372	91	.0217	99
54	.0803	82	.0464	90	.0273	98
55	.0974	81	.0570	89	.0338	97
56	.1172	80	.0694	88	0416	96

$m = 8$						
cl	*n=8*	c_u	*n=9*	c_u	*n=10*	c_u
57	.1393	79	.0836	87	.0506	95
58	.1641	78	.0998	86	.0610	94
59	.1911	77	.1179	85	.0729	93
60	.2209	76	.1383	84	.0864	92
61	.2527	75	.1606	83	.1015	91
62	.2869	74	.1852	82	.1185	90
63	.3227	73	.2117	81	.1371	89
64	.3605	72	.2404	80	.1577	88
65	.3992	71	.2707	79	.1800	87
66	.4392	70	.3029	78	.2041	86
67	.4796	69	.3365	77	.2299	85
68	.5204	68	.3715	76	.2574	84
69	.5608	67	.4074	75	.2863	83
70	.6008	66	.4442	74	.3167	82
71	.6395	65	.4813	73	.3482	81
72	.6773	64	.5187	72	.3809	80
73	.7131	63	.5558	71	.4143	79
74	.7473	62	.5926	70	.4484	78
75	.7791	61	.6285	69	.4827	77
76	.8089	60	.6635	68	.5173	76

m = 9									
cl	n=9	c_u	n=10	c_u	c_u	n=9	c_u	n=10	c_u
45	.0000	126	.0000	135	68	.0680	103	.0394	112
46	.0000	125	.0000	134	69	.0807	102	.0474	111
47	.0001	124	.0000	133	70	.0951	101	.0564	110
48	.0001	123	.0001	132	71	.1112	100	.0667	109
49	.0002	122	.0001	131	72	.1290	99	.0782	108
50	.0004	121	.0002	130	73	.1487	98	.0912	107
51	.0006	120	.0003	129	74	.1701	97	.1055	106
52	.0009	119	.0005	128	75	.1933	96	.1214	105
53	.0014	118	.0007	127	76	.2181	95	.1388	104
54	.0020	117	.0011	126	77	.2447	94	.1577	103
55	.0028	116	.0015	125	78	.2729	93	.1781	102
56	.0039	115	.0021	124	79	.3024	92	.2001	101

$m = 9$									
cl	$n=9$	c_u	$n=10$	c_u	c_u	$n=9$	c_u	$n=10$	c_u
57	.0053	114	.0028	123	80	.3332	91	.2235	100
58	.0071	113	.0038	122	81	.3652	90	.2483	99
59	.0094	112	.0051	121	82	.3981	89	.2745	98
60	.0122	111	.0066	120	83	.4317	88	.3019	97
61	.0157	110	.0086	119	84	.4657	87	.3304	96
62	.0200	109	.0110	118	85	.5000	86	.3598	95
63	.0252	108	.0140	117	86	.5343	85	.3901	94
64	.0313	107	.0175	116	87	.5683	84	.4211	93
65	.0385	106	.0217	115	88	.6019	83	.4524	92
66	.0470	105	.0267	114	89	.6348	82	.4841	91
67	.0567	104	.0326	113	90	.6668	81	.5159	90

$m = 10$					
cl	$n=10$	c_u	c_u	$n=10$	c_u
55	.0000	155	81	.0376	129
56	.0000	154	82	.0446	128
57	.0000	153	83	.0526	127
58	.0000	152	84	.0615	126
59	.0001	151	85	.0716	125
60	.0001	150	86	.0827	124
61	.0002	149	87	.0952	123
62	.0002	148	88	.1088	122
63	.0004	147	89	.1237	121
64	.0005	146	90	.1399	120
65	.0008	145	91	.1575	119
66	.0010	144	92	.1763	118
67	.0014	143	93	.1965	117

$m = 10$					
cl	$n=10$	c_u	c_u	$n=10$	c_u
68	.0019	142	94	.2179	116
69	.0026	141	95	.2406	115
70	.0034	140	96	.2644	114
71	.0045	139	97	.2894	113
72	.0057	138	98	.3153	112
73	.0073	137	99	.3421	111
74	.0093	136	100	.3697	110
75	.0116	135	101	.3980	109
76	.0144	134	102	.4267	108
77	.0177	133	103	.4559	107
78	.0216	132	104	.4853	106
79	.0262	131	105	.5147	105
80	.0315	130			

एक प्रतिज्ञा असे आमुची ज्ञानाची साधना ।
चिरंतन ज्ञानाची साधना ।
ज्ञान हेच संजीवन साऱ्या जगताच्या जीवना ।। धृ ।।
ज्योत जागवू सुजाणतेची सकलांच्या अंतरी ।
तीच निवारील पटल तमाचे प्रभात सूर्यापरी ।
ज्ञानच देउळ, ज्ञानच दैवत, प्रगतीच्या पूजना ।। १ ।।
नव्या युगाचा नव्या जगाचा ज्ञान धर्म आहे ।
त्यातच अमुच्या उजळ उद्याचे आश्वासन राहे ।
मुक्त करिल तो परंपरेच्या बंदिघरातुन मना ।। २ ।।
हाच मंत्र नेईल आम्हाला दिव्य भविष्याकडे ।
न्यायनीतीचे पाऊल जेथे भेदाशी ना अडे ।
जे जे मंगल पावन त्याची जेथे आराधना ।। ३ ।।

– कुसुमाग्रज

वेबसाईट
http://ycmou.digitaluniversity.ac